OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO - 2025

06 de Setembro de 2025

Nível U

1. Um robô está em um tabuleiro retangular cujos vértices são os pontos $(0,0)$, $(4,0)$, $(4,4)$ e $(0,4)$. Inicialmente, o robô encontra-se na posição $(1,2)$. A cada minuto, ele escolhe aleatoriamente, com a mesma probabilidade, uma das quatro direções (direita, esquerda, para cima ou para baixo) e anda exatamente uma unidade nessa direção, parando assim que alcança a fronteira do tabuleiro (isto é, algum ponto dos lados $x = 0$, $x = 4$, $y = 0$ ou $y = 4$).

   Qual é a probabilidade de o robô terminar em um dos lados verticais ($x = 0$ ou $x = 4$)?

2. Para cada número inteiro $n > 1$ queremos colorir os números $2, 3, \ldots, n$ com k cores de modo que se $a, b, c \in \{2, \ldots, n\}$ e $a \cdot b = c$, então a, b e c não podem ser os 3 da mesma cor. Denote por a_n o menor k para o qual isso é possível.

   (a) Calcule a_{45}.

   (b) Calcule a_{2025}.

3. Seja M um inteiro positivo, tome

   $$x_n = \sigma_1 1^2 + \sigma_2 2^2 + \ldots + \sigma_n n^2.$$

   Cada σ_i assume independentemente os valores 0 e 1 com a mesma probabilidade.

   Seja p_n a probabilidade de M dividir x_n. Mostre que existe e calcule

   $$\lim_{n\to\infty} p_n$$

4. Seja $A(n)$ o número de matrizes idempotentes 2×2 com entradas inteiras no intervalo $[-n, n]$. Prove que, para todo $n \geq 1$, $A(n+1) - A(n)$ é uma potência de 2. Os valores iniciais de $A(n)$ são, começando com $A(0) = 1$:

   $$1, 12, 28, 44, 60, 76, 108, 124$$

   Uma matriz quadrada é idempotente se $A^2 = A$.

5. Neste problema, consideramos um conjunto de cidades ligadas por estradas de mão dupla (cada estrada liga exatamente duas cidades), de modo que é possível viajar entre quaisquer duas cidades (ou seja, a rede é conectada).

   Uma estrada é chamada estrada essencial se, ao bloqueá-la, a rede deixa de ser totalmente conectada.

   Chamamos a rede de Euleriana se existe um percurso fechado (começando e terminando na mesma cidade) que percorre cada estrada exatamente uma vez. Um teorema de Euler afirma que uma rede de cidades é Euleriana se, e somente se, em cada cidade o número de estradas que chegam é par. (Euler não apresentou a prova desse teorema; embora seja simples, você pode utilizá-lo sem demonstração.)

   Podemos orientar as estradas atribuindo um sentido a cada uma (ou seja, transformando-as em mão única).

   Dizemos que uma orientação é Euleriana se, em cada cidade, o número de estradas que chegam é igual ao número de estradas que saem. Note que um percurso fechado começando e terminando na mesma cidade induz uma orientação Euleriana.

   Uma orientação é chamada *forte* se, para quaisquer duas cidades A e B, é possível viajar de A até B seguindo as direções escolhidas das estradas.

   Uma orientação é chamada *quase Euleriana* se, em cada cidade, a diferença (em módulo) entre o número de estradas que chegam e o número de estradas que saem é, no máximo, 1.

(a) Prove que toda orientação Euleriana é forte.

(b) Prove que se não existem estradas essenciais, então existe uma orientação quase Euleriana e forte.