

OLIMPIÁDA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO - 2025

06 de setembro de 2025

Nível 4 (3º ano do ensino médio)

1. Se o par (x, y) é solução real do sistema

$$\begin{cases} (x^2 + xy + y^2)\sqrt{x^2 + y^2} = 88 \\ (x^2 - xy + y^2)\sqrt{x^2 + y^2} = 40 \end{cases}$$

calcule $|x - y|$.

2. Um número n é dito *Fibonacci divisível* se é possível dividir os n primeiros números de Fibonacci F_1, F_2, \dots, F_n em dois conjuntos cuja soma dos elementos for igual. Para cada valor de n abaixo, diga se n é Fibonacci divisível. Caso seja, mostre como dividir os elementos, caso não seja, prove que é impossível dividir os elementos.

(a) $n = 2026$.

(b) $n = 2025$.

(c) $n = 2024$.

Lembre que os números de Fibonacci são dados pela recorrência $F_1 = 1, F_2 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ para $n \geq 1$.

3. Considere a sequência a_n definida por $a_0 = 0, a_{2n+2} = 2a_{n+1} + 1$ e $a_{2n+1} = 2a_n$ para todo $n \geq 0$.

(a) Para cada k inteiro positivo, encontre fórmulas para os valores a_{2^k} e a_{2^k-1} (lembre-se de demonstrar que as fórmulas valem para todo k inteiro positivo).

(b) Quantos valores de n satisfazem $1 \leq n \leq 2^{2025}$ e $a_n = 45$.

4. Um robô está em um tabuleiro retangular cujos vértices são os pontos $(0, 0), (4, 0), (4, 4)$ e $(0, 4)$. Inicialmente, o robô encontra-se na posição $(1, 2)$.

A cada minuto, ele escolhe aleatoriamente, com a mesma probabilidade, uma das quatro direções (direita, esquerda, para cima ou para baixo) e anda exatamente uma unidade nessa direção, parando assim que alcança a fronteira do tabuleiro (isto é, algum ponto dos lados $x = 0, x = 4, y = 0$ ou $y = 4$).

Qual é a probabilidade de o robô terminar em um dos lados verticais ($x = 0$ ou $x = 4$)?

5. Em um triângulo ABC , trace a bissetriz interna AP . Considerando os raios dos círculos inscritos dos triângulos ABP e ACP como r_1 e r_2 , respectivamente, prove que $\frac{r_2}{r_1} < 2$.

6. Determine todas as funções $f: [1, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ que satisfazem as seguintes condições:

(i) $f(x+1) = \frac{(f(x))^2 - 1}{x}$ para $x \geq 1$;

(ii) a função $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ é limitada.

Uma função g é limitada se existe um número real $M > 0$ tal que $|g(x)| \leq M$ para todo x pertencente ao domínio de g .