

OLIMPIÁDA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO - 2025

06 de setembro de 2025

Nível 3 (1º e 2º anos do ensino médio)

1. Se o par (x, y) é solução real do sistema

$$\begin{cases} (x^2 + xy + y^2)\sqrt{x^2 + y^2} = 88 \\ (x^2 - xy + y^2)\sqrt{x^2 + y^2} = 40 \end{cases}$$

calcule $|x - y|$.

2. No campeonato de futebol da OMERJ, 20 equipes participaram do campeonato. Cada par de times se enfrenta exatamente uma vez. Cada vitória vale 3 pontos, cada empate vale 1 ponto e derrotas não valem pontos. Ao final do campeonato, a soma da pontuação de todos os times foi 552.

- (a) Quantas partidas foram jogadas no campeonato?
- (b) Quantas partidas terminaram em empate?
- (c) Prove que existem 7 times que empataram pelo menos uma partida.

3. Um número n é dito *Fibonacci divisível* se é possível dividir os n primeiros números de Fibonacci F_1, F_2, \dots, F_n em dois conjuntos cuja soma dos elementos for igual. Para cada valor de n abaixo, diga se n é Fibonacci divisível. Caso seja, mostre como dividir os elementos, caso não seja, prove que é impossível dividir os elementos.

- (a) $n = 2026$.
- (b) $n = 2025$.
- (c) $n = 2024$.

Lembre que os números de Fibonacci são dados pela recorrência $F_1 = 1, F_2 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ para $n \geq 1$.

4. Considere a sequência a_n definida por $a_0 = 0, a_{2n+2} = 2a_{n+1} + 1$ e $a_{2n+1} = 2a_n$ para todo $n \geq 0$.

- (a) Para cada k inteiro positivo, encontre fórmulas para os valores a_{2^k} e a_{2^k-1} (lembre-se de demonstrar que as fórmulas valem para todo k inteiro positivo).
- (b) Quantos valores de n satisfazem $1 \leq n \leq 2^{2025}$ e $a_n = 45$?

5. Em um triângulo ABC , trace a bissetriz interna AP . Considerando os raios dos círculos inscritos dos triângulos ABP e ACP como r_1 e r_2 , respectivamente, prove que $\frac{r_2}{r_1} < 2$.

6. Para cada número inteiro $n > 1$ queremos colorir os números $2, 3, \dots, n$ com k cores de modo que se $a, b, c \in \{2, \dots, n\}$ e $a \cdot b = c$, então a, b e c não podem ser os 3 da mesma cor. Denote por a_n o menor k para o qual isso é possível.

- (a) Calcule a_{45} .
- (b) Calcule a_{2025} .