OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA
DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO - 2025

06 de setembro de 2025

Nível 2 (8^o e 9^o anos do ensino fundamental)

Problemas da parte A.

1. Quantos números inteiros menores que 2.025.000 têm a propriedade de que o dobro do seu cubo termina em 6?

2. Um número de 4 algarismos $abcd$ é chamado de *autonúmero* se o algarismo a indica exatamente quantos zeros aparecem no número, o algarismo b indica exatamente quantos uns aparecem, o algarismo c indica exatamente quantos dois aparecem e o algarismo d indica exatamente quantos três aparecem. Encontre a soma de todos os autonúmeros.

3. Se o par (x, y) é solução real do sistema

$$\begin{cases} (x^2 + xy + y^2)\sqrt{x^2 + y^2} = 88 \\ (x^2 - xy + y^2)\sqrt{x^2 + y^2} = 40 \end{cases}$$

   calcule $|x - y|$.

4. Um número inteiro $n > 1$ é dito *especial* se existem inteiros positivos a, b, x e y tais que

$$a + b = n \qquad \text{e} \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

   Encontre o maior número inteiro menor que 100 que **não** seja especial.

Problemas da parte B.

5. Sejam ABC um triângulo acutângulo e BP e CQ suas alturas relativas aos vértices B e C. Considere H o ortocentro de ABC (isto é, o ponto de interseção das alturas BP e CQ) e sejam O e M os pontos médios de AH e BC, respectivamente. Prove que OM e PQ são perpendiculares.

6. Maria ganhou um celular novo da sua tia e precisa criar uma senha de 3 dígitos (0 a 9, inclusive). Para garantir sua segurança, a tia de Maria disse que a senha que ela escolher deve satisfazer as seguintes condições:

   - Pelo menos um dígito deve ser par, e pelo menos um dígito deve ser ímpar.
   - O dígito do meio não pode ser a média aritmética dos outros dois dígitos.

   Quantas senhas possíveis Maria pode escolher?

7. João e Caio moram em margens opostas de um rio. Em cada margem há uma única rua com casas alinhadas, numeradas sequencialmente $1, 2, 3, \ldots$. Sabe-se que em cada margem existem pelo menos 2 casas e no máximo 100 casas e que, no lado de João, há menos casas do que no lado de Caio. Certo dia, João saiu de sua casa e caminhou até o final da rua, somando os números das casas que encontrou pelo caminho, sem contar a sua. No dia seguinte, ele caminhou no sentido oposto, em direção ao começo da rua, e novamente somou os números das casas (também sem contar a sua). Para sua surpresa, as duas somas foram iguais! João contou o ocorrido a Caio, que decidiu repetir a experiência em sua margem. Incrivelmente, Caio também obteve o mesmo resultado.

   Determine quantas casas existem em cada margem do rio e quais são os números das casas de João e de Caio.

8. Considere a sequência a_n definida por $a_0 = 0$, $a_{2n+2} = 2a_{n+1} + 1$ e $a_{2n+1} = 2a_n$ para todo $n \geq 0$.

   (a) Para cada k inteiro positivo, encontre fórmulas para os valores a_{2^k} e a_{2^k-1} (lembre-se de demonstrar que as fórmulas valem para todo k inteiro positivo).

   (b) Quantos valores de n satisfazem $1 \leq n \leq 2^{2025}$ e $a_n = 45$.