

**OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA
DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO - 2024**

14 de Setembro de 2024

Nível U

1. Prove que a equação

$$x^2 + y^2 = z^2 + 2024$$

possui infinitas soluções em inteiros positivos x, y, z .

2. Seja f uma função infinitamente diferenciável tal que $f(0) = f(2)$ e para todo x em $[0, 2]$, $f''(x)$ é estritamente decrescente. Mostre que $f'(1) > 0$.

3. Prove que

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x^4 + 2x^2 + 2}}{x^2 + 1} dx > \frac{1}{4} \sqrt{16 + \pi^2}.$$

4. Determine todos os inteiros positivos k tais que a sequência abaixo possua algum termo quadrado perfeito (diferente de x_0):

$$x_0 = 1, x_1 = 2$$

$$x_{n+2} = x_{n+1}^2 - kx_n.$$

5. Seja A uma matriz complexa $n \times n$. Para todo inteiro positivo m , existe uma matriz complexa invertível B_m , também $n \times n$, tal que $A^m = B_m A B_m^{-1}$. Encontre todos os autovalores de A .