

**OLIMPIÁDA DE MATEMÁTICA**  
**DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO - 2024**

14 de Setembro de 2024

Nível U

1. Prove que a equação

$$x^2 + y^2 = z^2 + 2024$$

possui infinitas soluções em inteiros positivos  $x, y, z$ .

2. Seja  $f$  uma função infinitamente diferenciável tal que  $f(0) = f(2)$  e para todo  $x$  em  $[0, 2]$ ,  $f''(x)$  é estritamente decrescente. Mostre que  $f'(1) > 0$ .

3. Prove que

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x^4 + 2x^2 + 2}}{x^2 + 1} dx > \frac{1}{4} \sqrt{16 + \pi^2}.$$

4. Determine todos os inteiros positivos  $k$  tais que a sequência abaixo possua algum termo quadrado perfeito (diferente de  $x_0$ ):

$$x_0 = 1, x_1 = 2$$

$$x_{n+2} = x_{n+1}^2 - kx_n.$$

5. Seja  $A$  uma matriz complexa  $n \times n$ . Para todo inteiro positivo  $m$ , existe uma matriz complexa invertível  $B_m$ , também  $n \times n$ , tal que  $A^m = B_m A B_m^{-1}$ . Encontre todos os autovalores de  $A$ .