OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA
DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO - 2024

14 de setembro de 2024

Nível 4 (3^o ano do ensino médio)

1. Sejam x e y inteiros satisfazendo $x + y \neq 0$. Encontre todos os pares (x, y) tais que

$$\frac{x^2 + y^2}{x + y} = 10$$

2. Um número de dois ou mais algarismos n é chamado de *sério* se ele satisfaz as seguintes propriedades

   (a) n é um quadrado perfeito.

   (b) n não possui algarismo nulo em sua representação decimal.

   (c) ao subtrair 1 de cada algarismo de n o resultado ainda é um quadrado perfeito.

   O menor número sério é 36, qual o próximo?

3. Seja ABC um triângulo inscrito numa circunferência Γ de centro O. Seja H o pé da altura de A em $\overline{BC}$. Sejam B' e C' os pés das perpendiculares traçadas de H a $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, respectivamente. A perpendicular traçada de A a $\overline{B'C'}$ encontra $\overline{B'C'}$ em D e a circunferência Γ em E.

   (a) Se O pertence $\overline{B'C'}$, calcule $\frac{\overline{HE}}{\overline{HD}}$.

   (b) Para o valor de $\frac{\overline{HE}}{\overline{HD}}$ encontrado no item anterior, necessariamente vale que $O \in \overline{B'C'}$?

4. Encontre todas as funções $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que

$$(f(x) + \frac{1}{2})(f(y) + \frac{1}{2}) = f(x + xy + f(y))$$

   para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

5. Considere um quadrado de lado 1 cujos lados sao espelhos.

   (a) Determine todos os valores de n para os quais um raio de luz pode sair do ponto médio de um lado e refletir n vezes (em pontos dois a dois distintos e nunca em um vértice do quadrado) e voltar ao ponto de onde saiu.

   (b) Para cada n acima, calcule o comprimento do menor caminho possível que esse raio de luz pode fazer.

6. Determine todos os inteiros positivos k tais que a sequência abaixo possua algum termo quadrado perfeito (diferente de x_0):

$$x_0 = 1, x_1 = 2$$
$$x_{n+2} = x_{n+1}^2 - kx_n.$$