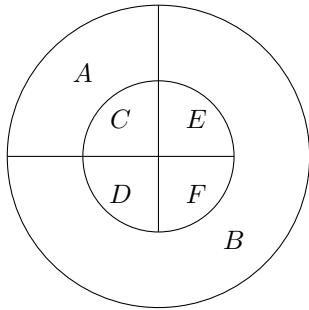


**OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA  
DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO - 2024**

14 de setembro de 2024

Nível 3 ( 1º e 2º anos do ensino médio)

1. Considere o mapa abaixo. Seja  $k$  o número mínimo de cores necessárias para pintar o mapa sem que regiões adjacentes tenham a mesma cor. Duas regiões são adjacentes se elas compartilham uma borda linear (compartilhar uma ou mais quinas não configura adjacência, por exemplo  $A$  e  $B$  são adjacentes mas  $A$  e  $E$  não são adjacentes).
  - (a) Encontre  $k$ .
  - (b) Dadas  $k$  cores, de quantas maneiras podemos pintar o mapa com essas cores.



2. Sejam  $x$  e  $y$  inteiros satisfazendo  $x + y \neq 0$ . Encontre todos os pares  $(x, y)$  tais que

$$\frac{x^2 + y^2}{x + y} = 10$$

3. Um número de dois ou mais algarismos  $n$  é chamado de *sério* se ele satisfaz as seguintes propriedades

- (a)  $n$  é um quadrado perfeito.
- (b)  $n$  não possui algarismo nulo em sua representação decimal.
- (c) ao subtrair 1 de cada algarismo de  $n$  o resultado ainda é um quadrado perfeito.

O menor número sério é 36, qual o próximo?

4. Seja  $ABC$  um triângulo inscrito numa circunferência  $\Gamma$  de centro  $O$ . Seja  $H$  o pé da altura de  $A$  em  $\overline{BC}$ . Sejam  $B'$  e  $C'$  os pés das perpendiculares traçadas de  $H$  a  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$ , respectivamente. A perpendicular traçada de  $A$  a  $\overline{B'C'}$  encontra  $\overline{B'C'}$  em  $D$  e a circunferência  $\Gamma$  em  $E$ .

- (a) Se  $O$  pertence  $\overline{B'C'}$ , calcule  $\frac{HE}{HD}$ .
- (b) Para o valor de  $\frac{HE}{HD}$  encontrado no item anterior, necessariamente vale que  $O \in \overline{B'C'}$ ?

5. Uma sequência é dita *bonita* se ela possui algum termo que é igual a média aritmética dos seus vizinhos. Um sequência é dita *inteligente* se ela possui um termo que é o quadrado de um número racional. Para quais  $k$  inteiros positivos, existe sequência  $a_0, a_1, \dots$  bonita e inteligente tal que  $a_n = ka_{n-1} - n$  para todo  $n \geq 1$ .

6. Considere um quadrado de lado 1 cujos lados são espelhos.

- (a) Determine todos os valores de  $n$  para os quais um raio de luz pode sair do ponto médio de um lado e refletir  $n$  vezes (em pontos dois a dois distintos e nunca em um vértice do quadrado) e voltar ao ponto de onde saiu.
- (b) Para cada  $n$  acima, calcule o comprimento do menor caminho possível que esse raio de luz pode fazer.