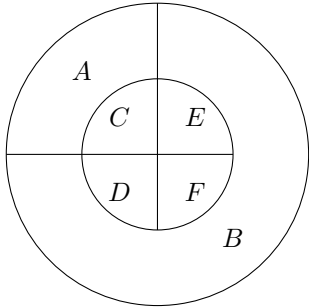


OLIMPIÁDA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO - 2024

14 de setembro de 2024

Nível 3 (1º e 2º anos do ensino médio)

1. Considere o mapa abaixo. Seja k o número mínimo de cores necessárias para pintar o mapa sem que regiões adjacentes tenham a mesma cor. Duas regiões são adjacentes se elas compartilham uma borda linear (compartilhar uma ou mais quinas não configura adjacência, por exemplo A e B são adjacentes mas A e E não são adjacentes.).
 - (a) Encontre k .
 - (b) Dadas k cores, de quantas maneiras podemos pintar o mapa com essas cores.



2. Sejam x e y inteiros satisfazendo $x + y \neq 0$. Encontre todos os pares (x, y) tais que

$$\frac{x^2 + y^2}{x + y} = 10$$

3. Um número de dois ou mais algarismos n é chamado de *sério* se ele satisfaz as seguintes propriedades
 - (a) n é um quadrado perfeito.
 - (b) n não possui algarismo nulo em sua representação decimal.
 - (c) ao subtrair 1 de cada algarismo de n o resultado ainda é um quadrado perfeito.

O menor número sério é 36, qual o próximo?

4. Seja ABC um triângulo inscrito numa circunferência Γ de centro O . Seja H o pé da altura de A em \overline{BC} . Sejam B' e C' os pés das perpendiculares traçadas de H a \overline{AC} e \overline{AB} , respectivamente. A perpendicular traçada de A a $\overline{B'C'}$ encontra $\overline{B'C'}$ em D e a circunferência Γ em E .
 - (a) Se O pertence $\overline{B'C'}$, calcule $\frac{HE}{HD}$.
 - (b) Para o valor de $\frac{HE}{HD}$ encontrado no item anterior, necessariamente vale que $O \in \overline{B'C'}$?
5. Uma sequência é dita *bonita* se ela possui algum termo que é igual a média aritmética dos seus vizinhos. Um sequência é dita *inteligente* se ela possui um termo que é o quadrado de um número racional. Para quais k inteiros positivos, existe sequência a_0, a_1, \dots bonita e inteligente tal que $a_n = ka_{n-1} - n$ para todo $n \geq 1$.
6. Considere um quadrado de lado 1 cujos lados são espelhos.
 - (a) Determine todos os valores de n para os quais um raio de luz pode sair do ponto médio de um lado e refletir n vezes (em pontos dois a dois distintos e nunca em um vértice do quadrado) e voltar ao ponto de onde saiu.
 - (b) Para cada n acima, calcule o comprimento do menor caminho possível que esse raio de luz pode fazer.