

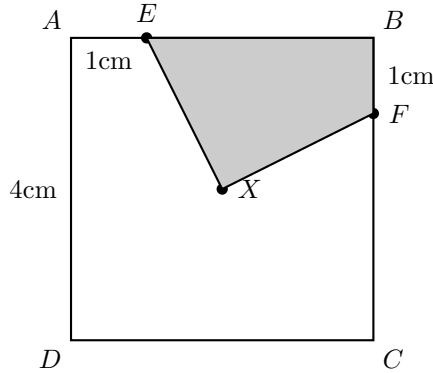
# OLIMPIÁDA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO - 2024

14 de setembro de 2024

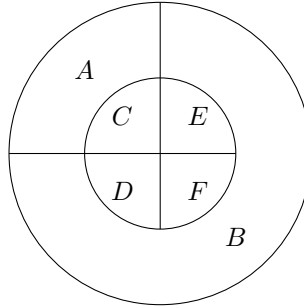
Nível 2 (8º e 9º anos do ensino fundamental)

## Problemas da parte A.

1. Abaixo temos um quadrado  $ABCD$  de lado 4cm e centro  $X$ . Sabe-se que  $\overline{AE} = \overline{BF} = 1\text{cm}$ . Qual a área do quadrilátero  $XEBF$ .



2. Sejam  $a$  e  $b$  números inteiros positivos tais que  $756a^2 = b^3$ . Qual o menor valor possível que  $a$  pode ter?
3. Considere o mapa abaixo. Queremos pintar o mapa sem que regiões adjacentes tenham a mesma cor. Duas regiões são adjacentes se elas compartilham uma borda linear (compartilhar uma ou mais quinas não configura adjacência, por exemplo  $A$  e  $B$  são adjacentes mas  $A$  e  $E$  não são adjacentes). De quantas maneiras podemos pintar o mapa com as cores Azul, Vermelho e Amarelo.



4. Um número inteiro positivo com pelo menos três algarismos é dito *especial* se ele tem as seguintes propriedades:
- (i) Todos seus dígitos são diferentes.
  - (ii) O seu dígito da esquerda é a soma dos outros dígitos.
- Quantos números especiais existem?

## Problemas da parte B.

5. O quadrilátero  $ABCD$  satisfaz  $\overline{AD} = \overline{BD} = \overline{CD}$ ,  $\widehat{ADB} = \widehat{DCA}$  e  $\widehat{CBD} = \widehat{BAC}$ . Encontre os ângulos do quadrilátero  $ABCD$ .

6. Valéria quer presentear suas 74 balas entre seus amigos. Mas ela decidiu seguir algumas regras:

- (i) Cada amigo que ganhar balas, vai ganhar um número ímpar de balas.
- (ii) Cada amigo que ganhar balas, vai ganhar uma quantidade diferente de balas.

Responda as seguintes perguntas

- (a) Valéria consegue presentear exatamente 5 amigos?
- (b) Se Valéria presentear 6 amigos, qual a quantidade máxima de balas que um deles pode receber?
- (c) Qual a quantidade máxima de amigos que Valéria consegue presentear com balas?

7. Sejam  $x$  e  $y$  inteiros satisfazendo  $x + y \neq 0$ . Encontre todos os pares  $(x, y)$  tais que

$$\frac{x^2 + y^2}{x + y} = 10$$

8. Inicialmente há um número inteiro positivo escrito no quadro. A cada momento, pode se apagar o número  $n$  escrito no quadro e

- escrever o número  $3n + 13$  no quadro, ou
  - escrever o número  $\sqrt{n}$ , se  $n$  for quadrado perfeito.
- (a) Se inicialmente temos o número 256 escrito no quadro, é possível que após um número finito de passos o número escrito no quadro seja o 55?
  - (b) Se inicialmente temos o número 55 escrito no quadro, é possível que após um número finito de passos o número escrito no quadro seja o 256?