OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA
DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO - 2023

23 de Setembro de 2023

Nível U

1. Sejam p e q numeros inteiros. Suponha que para infinitos valores inteiros de k a equação
$$x^2 + (p+k)x + (q+k) = 0$$
tenha raízes inteiras. Prove que existe α inteiro que é raíz de todas as equações acima para todo k.

2. Encontre o valor mínimo de
$$\cos(x)^2 - 2\sin(x) + \tan(x)^2.$$

3. Encontre todas as funções $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que
$$(f(x) + \frac{1}{2})(f(y) + \frac{1}{2}) = f(x + xy + f(y)).$$

4. Um número é *amigável* se ele é maior do que 10 e ao dividirmos pela soma dos seus algarismos o resto é 0 e o quociente é um quadrado perfeito. Dois números são ditos almas gemeas se eles são amigáveis e sua diferença é 2. Por exemplo $2023 = 7 \cdot 17^2$ e $2025 = 9 \cdot 15^2$ são almas gemeas. Encontre um outro par de almas gemeas.

5. Sejam n, d inteiros positivos. Considere $\mathcal{P} = \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ o espaço vetorial dos polinômios em n variáves, e defina $\mathcal{P}_d$ o subespaço de $\mathcal{P}$ cujos elementos são polinômios homogêneos de grau d. Considere a transformação linear
$$\begin{aligned} \Delta\colon \mathcal{P}_d &\to \mathcal{P} \\ f &\mapsto \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} f + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} f. \end{aligned}$$
Calcule a dimensão do núcleo de Δ.

   Obs. Um polinômio é dito homogêneo de grau d se todos os seus monômios são homogêneos de grau d, por exemplo, $f = x_1^3 + 3x_1x_2x_3 + x_5^2x_6$ é um polinômio homogêneo de grau 3. Consideramos que 0 é um polinômio homogêneo de grau d, para qualquer d.