

**OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA
DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO - 2023**
23 de Setembro de 2023

Nível 4 (3º ano do ensino médio)

1. Em uma caixa há 3 bolas azuis e n bolas vermelhas. Sabe-se que, ao retirar duas bolas ao acaso (sem reposição) da caixa, a probabilidade das bolas serem diferentes é exatamente $1/2$. Qual o valor de n ?
2. Considere uma sequência a_1, a_2, a_3, \dots tal que $a_{n+10} = 2a_n - a_{n+1}$. Prove que se há 10 termos consecutivos da sequência que somam 0, então qualquer soma de 10 termos consecutivos é igual a diferença de dois termos da sequência.
3. Prove que todo número da forma

$$N = 5499 \dots 9913$$

satisfaz que N^2 e $(N + 1)^2$ possuem os mesmos algarismos.

4. Sejam p e q números inteiros. Suponha que cada equação

$$x^2 + (p + k)x + (q + k) = 0$$

tenha raízes inteiros para todo $k = 0, 1, 2, \dots$. Prove que existe α inteiro que é raiz de todas as equações acima.

5. Seja ABC um triângulo acutângulo não isósceles. Sejam E_A, E_B e E_C pontos nos lados BC, AC e AB tais que $\overline{E_A E_B} = \overline{E_C E_B}$ e $\widehat{A E_B E_C} = \widehat{C E_B E_A} = 45^\circ$. Analogamente, Sejam F_A, F_B e F_C pontos nos lados BC, AC e AB tais que $\overline{F_A F_C} = \overline{F_B F_C}$ e $\widehat{A F_C F_B} = \widehat{B F_C F_A} = 45^\circ$. Sabendo que $\overline{E_A E_B} = \overline{F_A F_C}$, calcule $\widehat{B A C}$.
6. Um número é *amigável* se ele é maior do que 10 e ao dividirmos pela soma dos seus algarismos o resto é 0 e o quociente é um quadrado perfeito. Dois números são ditos almas gêmeas se eles são amigáveis e sua diferença é 2. Por exemplo $2023 = 7 \cdot 17^2$ e $2025 = 9 \cdot 15^2$ são almas gêmeas. Encontre um outro par de almas gêmeas.