

OLIMPIÁDA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO - 2023

23 de Setembro de 2023

Nível 3 (1º e 2º anos do ensino médio)

1. O país da OMERJlândia é composto por duas ilhas A e B. É uma tradição da OMERJlândia que os habitantes da ilha A enviem presentes para os habitantes da ilha B no dia da OMERJ. Pela tradição, cada pessoa da ilha B recebe no máximo um presente e cada pessoa da ilha A envia no máximo um presente. Infelizmente, nem todos os habitantes da ilha A gostam de enviar presentes. Em 2023, $\frac{2}{3}$ dos habitantes da ilha A enviaram presentes, enquanto que $\frac{3}{5}$ dos habitantes da ilha B receberam presentes. Qual fração da população total da OMERJlândia recebeu presentes.
2. Seja m um número real. Considere α e β as raízes da equação quadrática

$$x^2 - mx + (m^2 - 2023) = 0.$$

Calcule $\alpha^2 + m\beta$.

3. João joga 4 dados de 6 faces e soma os 3 maiores números. Por exemplo, se João rolou 2, 5, 1 e 4, o resultado é $2+5+4=11$. Qual o valor esperado para o resultado?
Para calcular o valor esperado do resultado, se considera todas as possibilidades para o lançamento dos 4 dados e calcula-se a média de todos os resultados obtidos.
4. Considere uma sequência a_1, a_2, a_3, \dots tal que $a_{n+10} = 2a_n - a_{n+1}$. Prove que se há 10 termos consecutivos da sequência que somam 0, então qualquer soma de 10 termos consecutivos é igual a diferença de dois termos da sequência.
5. Seja ABC um triângulo acutângulo não isósceles. Sejam E_A, E_B e E_C pontos nos lados BC, AC e AB tais que $\widehat{E_A E_B} = \widehat{E_C E_B}$ e $\widehat{A E_B E_C} = \widehat{C E_B E_A} = 45^\circ$. Analogamente, Sejam F_A, F_B e F_C pontos nos lados BC, AC e AB tais que $\widehat{F_A F_C} = \widehat{F_B F_B}$ e $\widehat{A F_C F_B} = \widehat{B F_C F_A} = 45^\circ$. Sabendo que $\widehat{E_A E_B} = \widehat{F_A F_C}$, calcule \widehat{BAC} .
6. Prove que todo número da forma

$$N = 5499 \dots 9913$$

satisfaz que N^2 e $(N+1)^2$ possuem os mesmos algarismos.