OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA
DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO - 2022

17 de Setembro de 2022

Nível U

1. Calcule a integral indefinida
$$\int (4x^4 + 12x^2 + 3)e^{x^2} dx.$$

2. Uma sequência de números inteiros inteiros não negativos $a_1, a_2, \ldots$ é dita logarítmica se
$$a_{mn} = a_m + a_n$$
para todos $m, n = 1, 2, 3, \ldots$.
   (a) Dê um exemplo de uma sequência logarítmica.
   (b) Existe sequência logartimíca estritamente crescente? (ou seja, tal que $a_n < a_{n+1}$ para todo $n = 1, 2, 3, \ldots$)

3. Seja X e B matrizes reais $n \times n$ tais que
$$X^6 + X^5 + X^4 + 2X^3 + X^2 + X + I = B,$$
(I é a matriz identidade).
   (a) Prove que $\det(B) \geq 0$.
   (b) Prove que se $n = 2021$ não existem matrizes X e B satisfazendo a condição adicional de que $B = X^3$.

4. Seja $\alpha > 1$ um real. Para todo x inteiro positivo, considere a sequência $a_0, a_1, a_2, \ldots$ tal que $a_0 = 1$, $a_1 = x$ e
$$a_n = \begin{cases} \lfloor \sqrt{a_{n-1}a_{n-2}} \rfloor & \text{se } a_{n-1} \neq a_{n-2} \\ \lfloor \alpha a_{n-1} \rfloor & \text{se } a_{n-1} = a_{n-2}. \end{cases}$$
Seja x_α o maior valor possível para o qual a sequência (a_n) é limitada (ou seja, existe um inteiro $M > 0$ tal que $a_n < M$ para todo n natural).
   (a) Calcule $x_{\frac{3}{2}}$.
   (b) Calcule
$$\lim_{\alpha \to 1+} x_\alpha (\alpha - 1)^{\frac{3}{2}}.$$
Observação: A notação $\lfloor x \rfloor$ denota a parte de inteira do número real x, ou seja, $\lfloor x \rfloor$ é o único inteiro que satisfaz $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$. Por exemplo, $\lfloor 3.14 \rfloor = 3$, $\lfloor \frac{30}{7} \rfloor = 4$, $\lfloor 5 \rfloor = 5$.