

OLIMPIÁDA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO - 2022

17 de Setembro de 2022

Nível 4 (3º ano do ensino médio)

1. Encontre o maior número de 8 dígitos terminando em 2022 que é múltiplo de 99
2. Para todo inteiro n positivo, dê um exemplo de n números distintos tais que o produto de quaisquer dois deles é múltiplo de cada um dos demais.
3. Tem-se que 680 laranjas estão empilhadas em uma pirâmide triangular (A base da pirâmide é um triângulo). Quantas laranjas estão na base da pirâmide?
4. Seja n um inteiro positivo. Quantas são as soluções de $a + b + c + d = 12n$ com a, b, c, d inteiros não negativos distintos dois a dois.
5. Seja $ABCD$ um quadrado de lado 1 e considere P um ponto no prolongamento do lado AB de modo que B está entre A e P . Seja Q a interseção de DP com o lado BC e seja Γ a circunferência inscrita do triângulo CDQ . Seja G um ponto no lado BC , diferente do ponto Q , de modo que a reta PG é tangente a Γ . Finalmente, seja H o ponto no lado AB de modo que GH é perpendicular a PQ . Calcule GH .
6. Seja x um inteiro positivo. Considere a sequência a_0, a_1, a_2, \dots tal que $a_0 = 1$, $a_1 = x$ e

$$a_n = \begin{cases} \lfloor \sqrt{a_{n-1}a_{n-2}} \rfloor & \text{se } a_{n-1} \neq a_{n-2} \\ \lfloor \frac{5}{4}a_{n-1} \rfloor & \text{se } a_{n-1} = a_{n-2}. \end{cases}$$

Determine o maior valor possível para x para o qual a sequência (a_n) é limitada (ou seja, existe um inteiro $M > 0$ tal que $a_n < M$ para todo n natural).

Observação: A notação $\lfloor x \rfloor$ denota a parte de inteira do número real x , ou seja, $\lfloor x \rfloor$ é o único inteiro que satisfaz $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$. Por exemplo, $\lfloor 3.14 \rfloor = 3$, $\lfloor \frac{30}{7} \rfloor = 4$, $\lfloor 5 \rfloor = 5$.