

**OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA  
DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO - 2022**  
17 de Setembro de 2022

Nível 4 ( 3º ano do ensino médio)

1. Encontre o maior número de 8 dígitos terminando em 2022 que é múltiplo de 99
2. Para todo inteiro  $n$  positivo, dê um exemplo de  $n$  números distintos tais que o produto de quaisquer dois deles é múltiplo de cada um dos demais.
3. Tem se que 680 laranjas estão empilhadas em uma pirâmide triangular (A base da pirâmide é um triângulo). Quantas laranjas estão na base da pirâmide?
4. Seja  $n$  um inteiro positivo. Quantas são as soluções de  $a+b+c+d = 12n$  com  $a, b, c, d$  inteiros não negativos distintos dois a dois.
5. Seja  $ABCD$  um quadrado de lado 1 e considere  $P$  um ponto no prolongamento do lado  $AB$  de modo que  $B$  está entre  $A$  e  $P$ . Seja  $Q$  a interseção de  $DP$  com o lado  $BC$  e seja  $\Gamma$  a circunferência inscrita do triângulo  $CDQ$ . Seja  $G$  um ponto no lado  $BC$ , diferente do ponto  $Q$ , de modo que a reta  $PG$  é tangente a  $\Gamma$ . Finalmente, seja  $H$  o ponto no lado  $AB$  de modo que  $GH$  é perpendicular a  $PQ$ . Calcule  $GH$ .
6. Seja  $x$  um inteiro positivo. Considere a sequência  $a_0, a_1, a_2, \dots$  tal que  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = x$  e

$$a_n = \begin{cases} \lfloor \sqrt{a_{n-1}a_{n-2}} \rfloor & \text{se } a_{n-1} \neq a_{n-2} \\ \lfloor \frac{5}{4}a_{n-1} \rfloor & \text{se } a_{n-1} = a_{n-2}. \end{cases}$$

Determine o maior valor possível para  $x$  para o qual a sequência  $(a_n)$  é limitada (ou seja, existe um inteiro  $M > 0$  tal que  $a_n < M$  para todo  $n$  natural).

Observação: A notação  $\lfloor x \rfloor$  denota a parte de inteira do número real  $x$ , ou seja,  $\lfloor x \rfloor$  é o único inteiro que satisfaz  $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ . Por exemplo,  $\lfloor 3.14 \rfloor = 3$ ,  $\lfloor \frac{30}{7} \rfloor = 4$ ,  $\lfloor 5 \rfloor = 5$ .