

OLIMPIÁDA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO - 2022

17 de Setembro de 2022

Nível 3 (1º e 2º anos do ensino médio)

1. Encontre o maior número de 8 dígitos terminando em 2022 que é múltiplo de 99.
2. Um famoso índice de saúde é o IMC (índice de massa corporal)

$$I = \frac{P}{h^2},$$

sendo P o peso da pessoa em kg e h sua altura em metros.

Uma antiga ferramenta de cálculo de peso ideal, em kg, o define como a quantidade de cm excedentes a 1 metro na altura. Por exemplo, para uma pessoa de $1,65m$ de altura, essa ferramenta indicaria o peso ideal de 65kg.

Qual o maior valor possível para o IMC de uma pessoa que tem exatamente seu peso ideal pela antiga ferramenta?

3. Considere uma sequência tal que $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ e

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} - 3a_n$$

para todo $n \geq 0$ inteiro. Escolhendo um inteiro positivo $k \leq 2022^{2022}$ ao acaso, qual a probabilidade de:

(a) $a_k = 0$?

(b) $a_k > 0$?

4. Seja A um conjunto com n elementos. De quantas maneiras podemos escolher dois subconjuntos X, Y de modo que X está contido em Y ou Y está contido em X . (A escolha $X = \{1\}$ e $Y = \{1, 2\}$ é distinta da escolha $X = \{1, 2\}$ e $Y = \{1\}$).
5. Seja $ABCD$ um quadrado de lado 1 e considere P um ponto no prolongamento do lado AB de modo que B está entre A e P . Seja Q a interseção de DP com o lado BC e seja Γ a circunferência inscrita do triângulo CDQ . Seja G um ponto no lado BC , diferente do ponto Q , de modo que a reta PG é tangente a Γ . Finalmente, seja H o ponto no lado AB de modo que GH é perpendicular a PQ . Calcule GH .
6. Seja x um inteiro positivo. Considere a sequência a_0, a_1, a_2, \dots tal que $a_0 = 1$, $a_1 = x$ e

$$a_n = \begin{cases} \lfloor \sqrt{a_{n-1}a_{n-2}} \rfloor & \text{se } a_{n-1} \neq a_{n-2} \\ \lfloor \frac{3}{2}a_{n-1} \rfloor & \text{se } a_{n-1} = a_{n-2}. \end{cases}$$

Determine o maior valor possível para x para o qual a sequência (a_n) é limitada (ou seja, existe um inteiro $M > 0$ tal que $a_n < M$ para todo n natural).

Observação: A notação $\lfloor x \rfloor$ denota a parte de inteira do número real x , ou seja, $\lfloor x \rfloor$ é o único inteiro que satisfaz $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$. Por exemplo, $\lfloor 3.14 \rfloor = 3$, $\lfloor \frac{30}{7} \rfloor = 4$, $\lfloor 5 \rfloor = 5$.