OMERJ 2021

Nível 4

Primeira fase

1. A soma dos **módulos** dos valores reais x tais que $x^2 + x - 8 = \frac{-12}{x^2+x}$ é:

Faço u= x^2+x. Fica u-8=-12/u o que dá u^2-8u+12=0 daí u=2 ou u=6. Resolvendo as duas equações x^2+x =2 e x^2+x =6 obtemos os 4 valores 2, -2, 1, -3. E somando os módulos temos a resposta:8.

2. Quantos inteiros positivos n satisfazem a seguinte condição:
$$(145n)^{60} > n^{120} > 3^{180}?$$

   Temos $(145n)^{60}$>$(n^2)^{60}$ >$(3^3)^{60}$. Daí 145n > n^2 > 3^3

   Então 145>n e n^2 >27. Então 5<n<145 e temos os inteiros de 6 a 144. Se fosse de 1 a 144 seriam 144 números, descontando os 5 primeiros, ficam 139.

3. Um triângulo cujos lados são inteiros positivos a, b e c. Sabendo que $a = 3b$ e $c = 19$. Qual o maior perímetro possível desse triângulo.

Temos a<b+c, b<a+c, c<a+b. Então 3b<b+19, b<3b+19 e 19<4b.

Então 2b<19<4b Então o maior valor de b possível é 9. E o maior perímetro é 27+9+19=55

4. Em uma festa, a média das idades de todas as pessoas era de 30 anos. Nesta festa, havia 100 pessoas que estavam vestindo roupas amarelas e, entre estas pessoas, a média das idades era de 25 anos. Se considerarmos só as pessoas que não estavam vestindo amarelo, a média das idades era 32. Quantas pessoas estavam na festa?

   Seja p o número de pessoas na festa, e seja a_n a idade da pessoa n.
   Temos (a_1+ ...a_{100})/100 =25 , (a_{101}+....+a_p)/(p-100) =32 e
   (a_1+...a_{100}+a_{101}+....a_p)/p =30.
   Seja A = a1+...a_{100} e seja B= a_{101}+...a_p.
   Temos A/100 =25 , B/(p-100) =32 e (A+B)/p =30 Resolvendo o sistema achamos A=2500, B=14000 e p= 350.

5. O ângulo x mede 15^o a mais que o ângulo y. Se ambos os ângulos são agudos e $\operatorname{sen}(2x) \cdot \sec(4y) = 1$, qual a soma das possíveis medidas, em graus, do ângulo y?

Temos sen(2x)=cos(4y)= sen(90-4y) . Então 2x=90-4y +360k ou 2x= 180-(90-4y)+360k e x=15+y, Então 30+2y=90-4y+360k o que dá 6y=60+360k ,logo y=10+60k e temos 2 valores y=10 e y=70. No outro caso , 30+2y=90+4y+360k o que dá y=-30-180k o que não gera y entre 0 e 90. Então só há dois valores:10 e 70 e a resposta é 80.

6. Seja a_n uma sequência de números reais satisfazendo $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$. Sabendo que $a_3 = 9$ e $a_6 = 128$, quanto vale a_5?

Fazendo n=3 temos $a_5=2a_4+a_3$ e fazendo n=4 temos $a_6=2a_5 +a_4$. Então

$a_5=2a_4+ 9$ e $128=2a_5 +a_4$. Segue $a_5= 53$.

7. Seja A o conjunto $\{1,2, \dots ,2021\}$. Quantas são as funções $f: A \to A$ tais que $f\big(f(x)\big) = 2f(x)$ para todo $x \in A$.

Seja f(x)=n. Então f(n)=2n, e f(2n)=4n, de modo com no máximo 12 passos chegamos a um valor maior que 2021 o que é uma contradição, logo não há função satisfazendo à condição e a resposta é 0.

8. De quantas maneiras podemos colocar números do conjunto $\{1,2,3, \dots , 100\}$ nos vértices de um quadrado $ABCD$ de forma que em vértices consecutivos estejam números consecutivos? Observação: Considere que soluções obtidas por rotações e reflexões são distintas.

Vamos escrever os 4 números nas posições ABCD em sequencia: Há soluções usando 2 números , como 1212 e soluções usando 3 números como 1232. Com 1 e 2 há duas maneiras: 1212 e 2121. Com 123 há 4 maneiras: 1232,3212, 2123 e 2321.

Então, para cada par de números consecutivos, temos 2 soluções e são 99 pares, logo 198 soluções e para cada trio de números consecutivos temos 4 soluções e são 98 trios ,logo 392 soluções, o que dá um total de 590 soluções.

9. Um número n de 3 algarismos é dito *malandro* se possuir um múltiplo $m \neq n$, também com 3 algarismos, de forma que o algarismo das centenas de n é igual ao algarismo das unidades de m e o algarismo das unidades de n é igual ao algarismo das centenas de m. Calcule a soma de todos os números malandros de 3 algarismos.

O algarismo das centenas de um tal número não pode ser maior que 3, senão qualquer múltiplo terá pelo menos 4 algarismos. Suponha que seja o número 3ab. Os únicos múltiplos que servem são o dobro e o triplo. O dobro não serve porque não pode ser ba3, já que teria que ser par. Para que o triplo de 3ab termine em 3, b teria que ser 1 e o triplo de 3a1 tem 9 como algarismo das centenas ou tem 4 algarismos.
Então números malandros são da forma 1ab ou 2ab.
Para que 1ab x c termine em 1, devemos ter b=3 e c=7, ou b=7 e c=3 ou b=c=9.

1a7 x3 não tem 7 como algarismo das centenas e 1a3 x7 não tem 3 como algarismo das centenas. Com 9 encontramos apenas 109. Qualquer outro valor para o algarismo das dezenas, gera um múltiplo de 4 algarismos.

Vamos procurar os números 2ab com múltiplo bc2.Procurando os múltiplos de 2ab que terminam em 2, chegamos a 208 e 218. Somando os 3 números encontrados temos 535.

10. Os valores de x, y, e z que satisfazem às equações $x + {}^{1}/_{y} = 2$, $y + {}^{1}/_{z} = 3$ e $z + {}^{1}/_{x} = {}^{3}/_{5}$ são tais que $4x - 3y + 15z$ é igual a:

Resolvemos a 1ª equação em x ,a segunda em z, e substituímos x e z por seus valores em função de y, na 3ª equação. Obtemos uma equação em y, de 2º grau, que tem raiz dupla y=-2. Substituindo de volta na 1ª e na 2ª equações, obtemos x=5/2 e z=1/5 e a resposta é 19.

11.Quantos cubos perfeitos são divisores positivos do número $20! \cdot 21!$?

Vamos decompor 20! em fatores primos;

20!=1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15.16.17.18.19.20.

Temos 18 fatores 2, 8 fatores 3, 3 fatores 5, 2 fatores 7, 1 fator 11, 1 fator 13,1 fator 17 e 1 fator 19.

Em 20!.21! dobramos todas as quantidades, e acrescentamos um3 e um 7.

Ficamos com 36 fatores 2, 17 fatores 3, 6 fatores 5 ,5 fatores 7 e 2 fatores de cada entre 11,13,17,19.

Para termos um divisor cubo, devemos:

escolher 0 ou3 ou 6 ou 9 ou...36 fatores 2 o que dá 13 escolhas,

escolher 0 ou 3 ou 6 ou...15 fatores 3, o que dá 6 escolhas

,0 ,3 ou 6 fatores 5 , o que dá 3 escolhas

, 0 ou 3 fatores 7, o que dá mais 2 escolhas

. Multiplicando, dá 13x6x3x2=468

12. Cinco inteiros positivos (não necessariamente distintos) são escolhidos aleatoriamente entre 1 e 100, inclusive. Se a probabilidade de existir um par desses inteiros cuja diferença é múltipla de 5 é escrita na forma $\frac{p}{q}$ com p e q inteiros positivos primos entre si, quanto vale $q - p$?

Vamos calcular a probabilidade de não existir par com diferença múltiplo de 5. Então p/q será 1 menos este valor.

São 100^5 escolhas possíveis. Escolhido o 1º número, há 20 números proibidos para a 2ª escolha. Por exemplo se a 1ª escolha é 38, os números da forma 5k+3 são proibidos para k de 0 a 19. Então são 100 possíveis 1as escolhas, mas apenas 80 possíveis 2as escolhas, e da mesma forma para a 3ª escolha há mais 20 números proibidos, ou seja há 60 valores possíveis para a 3ª escolha, e 40 para a 4ª escolha e 20 para a 5ª escolha. A probabilidade é então

100x80x60x40x20 dividido por 100x100x100x100x100. O que dá 24/625. Fazendo 1 menos esse valor, temos 601/625 para p/q. Logo q-p=24.

13. Seja S o conjunto de 9 pontos (a, b) no plano cartesiano onde a e b podem ser -1, 0, ou 1. Quantas retas distintas passam por pelo menos dois pontos de S?

Temos 3 retas verticais, 3 retas horizontais, 3 retas inclinadas a 45 graus para direita, 3 retas inclinadas a 45 graus para a esquerda, e para cada ponto médio de lado, as duas retas que ligam este ponto aos pontos médios dos dois lados adjacentes, dando mais 8 retas. Total:20 retas.

14. O triângulo ABC inscrito na circunferência Γ possui lado $AC = 13$, $AB = 15$ e $BC = 14$. Qual o maior raio possível de uma circunferência que tangencia o lado $\overline{BC}$ e o arco menor $\widehat{BC}$ de Γ?

Vamos achar o circuncentro O e o raio r do círculo circunscrito . O raio procurado é o dobro da diferença entre r e a distância entre O e o lado BC.

Vamos usar geometria analítica, colocando o ponto B em (-7,0), o ponto C em (7,0) e o ponto A em (a,b), com a e b positivos. Escrevendo que s distância entre A e B é 15 e a distância entre A e C é 13, temos um sistema em a e b que resolvemos para obter a=2 e b=12. O ponto O está na reta x=0. Seja c sua ordenada. Escrevendo que (0,c) equidista de (7,0) e (2,12) achamos c=33/8. Com O e C calculamos r= 65/8 e daí r-c=4, e a resposta é 2.

15. Seja a_n a sequência definida por $a_0 = 2021^{2021}$ e a_{n+1} é o maior divisor primo de $(1 + a_n)$. Calcule $a_{10^{2021}} + a_{10^{2021}+1}$.

Passo 1: verificar que para algum n grande, mas ainda menor que 10^{2021}, temos $a_n=2$.

Passo 2. Se a_n =2, então a_{n+1} =3 , a_{n+2}=2 , daí em diante os termos alternam entre 2 e 3 e a resposta é 5.

Para demonstrar o passo 1, observe que a_0 é ímpar, logo ao +1 é par e ou seu maior divisor primo é 2 ou é menor que (1+a0)/2. Então a1 < a0/2 pois são todos números inteiros. Da mesma forma, teremos $a_2<a_1/2<a_0/4$ e assim por diante. Se a_n nunca for 2, terminará sendo menor que 1 já que $a_o/2^n<1$ equivale a $a_0 < 2^n$, o que ocorre para n=2021x11, já que $2021<2^{11}$. Devemos ainda observar que 2021x11< 10^{2021}, logo a_n chega em 2 bem antes de n chegar em 10^{2021}.

16. Qual a soma de todos os números de 3 algarismos que são múltiplos de 45 e cujos dígitos, em alguma ordem, formam uma progressão aritmética?

Queremos números de 3 algarismos, múltiplos de 5 e de 9. Então terminam em 0 ou 5 e a soma dos 3 algarismos é múltiplo de 9, ou seja é 9 ou 18.

Terminando em 0 e com soma 9 temos 540 540 630 360 720 270 810 180 900. Coma condição de p.a. temos apenas 360 e 630.

Terminando em 0 com soma 18 temos 990 que não serve.

Terminando em 5 com soma 9 temos 405 315 135 225 . Servem 135 e 315.

Terminando em 5 com soma 18 temos 945 495 855 585 765 675 . Servem 765 e 675

Somando tudo dá 2880;

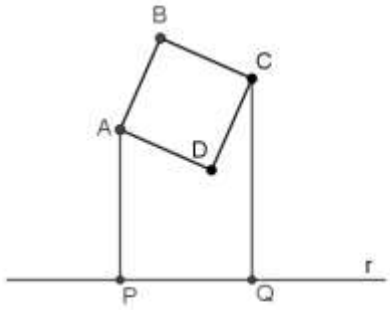
17. Dois subconjuntos do conjunto $S = \{a, b, c, d, e\}$ devem ser escolhidos de modo que sua união seja S e sua interseção possua exatamente dois elementos. De quantos modos essa escolha pode ser feita, supondo que a ordem em que os subconjuntos são escolhidos não importa?

Há 10 maneiras de escolher a interseção (combinação de 5,2 a 2). Para cada escolha da interseção há 4 escolhas para completar um dos conjuntos: 0 elementos em um subconjunto e os outros 3 no outro,ou uma das 3 maneiras de colocar um elemento em um subconjunto, deixando os outros dois para o outro. Então no total dá 4x10=40 maneiras. Por exemplo se escolhemos {a,b} para a interseção , as 4 maneiras são: {ab} e {abcde}, {abc} e {abde}, {abd} e {abce}, {abe} e {abcd}.

18. Para cada inteiro positivo n, seja $f(n)$ o quadrado da soma dos algarismos de n. Por exemplo, $f(3) = 3^2 = 9$ e $f(273) = (2 + 7 + 3)^2 = 144$. Qual o valor de $f\left(f\left(f(\ldots(f(2))\ldots)\right)\right)$, onde f é aplicada 2021 vezes.

F(2)=4; f(4)=16;f(16)=49;f(49)=169; f(169)=256; f(256)=169 e vai repetindo 256 e 169.Como 169 é obtido na 4ª iteração e 256 na 5ª, todas as iterações ímpares daí em diante vão dar 256, em particular a iteração 2021.

19. Na figura, $ABCD$ é um quadrado e r é uma reta exterior ao quadrado. Sejam P e Q pontos sobre r tais que AP e CQ são perpendiculares a r. Se a área do pentágono $PADCQ$ é igual a 99 e o produto $\overline{AP} \cdot \overline{CQ}$ é igual a 220, quanto vale a distância de D até a reta r?



Sejam q o lado do quadrado, x a distância de D à reta r, g o ângulo agudo entre a reta AD e a reta r.
Então: a área do pentágono é a soma das áreas de 2 trapézios cujas áreas são (AP+x)qcos(g)/2 e (CQ+x)qsen(g)/2 (base média vezes altura para ambos)
AP=x+qsen(g) e CQ=x+qcos(g). Substituindo AP e CQ por esses valores, temos:
[2x+qsen(g)]qcos(g)/2 +[2x+qcos(g)]qsen(g)/2 =99 e
[x+qsen(g)][x+qcos(g)]=220. Desenvolvendo:

$q[\text{sen}(g)+\cos(g)]x+ q^2\text{sen}(g)\cos(g)=99$ e $x^2+q[\text{sen}(g)+\cos(g)]x +q^2\text{sen}(g)\cos(g)=220$
Subtraindo uma da outra, vem: $x^2=121$, logo x=11.

20. Seja m um número cuja representação decimal consiste de 3 algarismos. Seja n o número obtido invertendo-se a ordem dos algarismos de m. Se o produto de m por n é igual a 394695, qual é a soma dos algarismos de m?

Seja abc o número. Temos abc x cba=394695. Então a ou c é igual a 5 e o outro é ímpar. Podemos supor c=5. Temos ab5 x 5ba =394695. Sabendo que a é ímpar, vamos tentar a=1 e fazer a conta: 1b5 x 5b1 com o algoritmo de multiplicação

	1	b	5
x	5	b	1
	1	b	5
		5b	
		6b	5

Como o algarismo das dezenas da resposta é 9, devemos ter 6b= 9 ou 19, o que é um absurdo.

Fazendo a=3

	3	b	5
x	5	b	3
	1	3b+1	5
		5b	

5b			
		8b+1	5

Então 8b+1=9 ou 19, ou seja 8b=8 ou 18 e chegamos a b=1.

Testando 315 x 513 não obtemos o valor pedido 394695.

Fazendo a=7 :

		7	b	5
x		5	b	7
		1	7b+3	5
			5b	
	5b			
			12b+3	5

Então 2b+3 = 9 ou 19 , ou seja b=3 ou 8. Testando 735 x 537 obtemos 394695.

E a resposta é então 7+3+5=15.