OMERJ 2021 prova nível 3 1ª fase resolvida.
As questões que não têm solução são comuns ao nível 4 e as soluções estão lá.

1. Para cada par de números reais $a \neq b$, define-se a operação $\star$ por
$$(\mathrm{a} \star b) = \frac{a+b}{a-b}$$
Sabendo que $\left((2 \star 3) \star 4\right) = \frac{p}{q}$ com p e q inteiros positivos primos entre si, quanto vale $p+q$:

   2*3=5/(-1)=-5. (-5)*4=(-1)/(-9)=1/9. Então p+q=10.

2. Quantos inteiros positivos n satisfazem a seguinte condição:
$$(145n)^{60} > n^{120} > 3^{180}?$$
R: 139
3. Um triângulo tem lados inteiros positivos a, b e c. Sabendo que $a = 3b$ e $c = 19$. Qual o maior perímetro possível desse triângulo.
R:55
4. Ontem, eu recebi uma certa quantidade de problemas e só pude resolver 70, restando mais da metade sem resolver. Hoje, recebi 6 novos problemas e resolvi 36, restando sem resolver do total, menos de 42 problemas. Quantos problemas recebi ontem?

Ontem: recebi x resolvi 70 sem resolver: x-70 > x/2

Hoje recebi 6 resolvi 36 sem resolver x+6- (70+36) <42

Então 140<x<142. Logo x=141.

5. Em uma sala de aula, o professor escreve 30 números no quadro negro e pede a Alex que calcule a média aritmética dos 30 números, a Rodrigo, que calcule a média dos 20 primeiros, a Matheus, a média dos 10 últimos. Se Rodrigo disse ao professor o número 10 e Matheus o número 37, que número disse Alex?

Sejam A a soma dos 20 primeiros números e B a soma dos 10 seguintes. O numero que Alex escreveu é (A+B)/30. O numero de Rodrigo é A/20 e o de Matheus é B/10..Então A=200 e B=370. Logo A+B=570 e (A+B)/30 = 19

6. Calcule quantos metros mede a hipotenusa de um triângulo retângulo ABC, com ângulo reto em B, sabendo-se que a medida da sua área é igual a $18m^2$ e que
$$\operatorname{tg}(\hat{A}) + \operatorname{tg}(\hat{C}) = 4\,.$$

   Sejam a b c as medidas dos lados respectivamente opostos aos ângulos A B C. Temos a/c +c/a =4 e ac/2 =18. Logo $(a^2+c^2)/(ac) = 4$ então $a^2+c^2= 4x36$ e aplicando Pitágoras, b=12

7. Seja a_n uma sequência de números reais satisfazendo $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$. Sabendo que $a_3 = 9$ e $a_6 = 128$, quanto vale a_5?
   R: 53
8. A soma dos **módulos** dos valores reais x tais que $x^2 + x - 8 = \frac{-12}{x^2+x}$ é:
   R:8
9. De quantas maneiras podemos colocar números do conjunto $\{1,2,3,\ldots,100\}$ nos vértices de um quadrado $ABCD$ de forma que em vértices consecutivos estejam números consecutivos? Observação: Considere que soluções obtidas por rotações e reflexões são distintas.
   R: 590.
10. Um número n de 3 algarismos é dito *malandro* se possuir um múltiplo $m \neq n$, também com 3 algarismos, de forma que o algarismo das centenas de n é igual ao algarismo das unidades de m e o algarismo das unidades de n é igual ao algarismo das centenas de m. Calcule a soma de todos os números malandros de 3 algarismos.
    R:535.
11. Uma refinaria comprou 3600 litros de gasolina e então retirou um volume V de gasolina e substituiu por álcool. Em seguida, retirou novamente o mesmo volume V da mistura e substituiu novamente este volume por álcool. Na mistura final existem 2025 litros de gasolina pura. O volume V em litros é:

Inicio: gasolina 3600 , álcool 0

Sai V de gasolina, entra V de álcool. Fica gasolina:3600-V , álcool: V

Sai: [(3600-V) /3600] V de gasolina e (V/3600)V de álcool e entra V de álcool.

Fica : 3600-V-[(3600-V) /3600] V de gasolina e V-(V/3600)V+V de álcool.

Temos 3600-V-[(3600-V) /3600] V = 2025. Resolvendo em V, achamos V=900.

12. Quantos cubos perfeitos são divisores positivos do número $20! \cdot 21!$?
    R: 468
13. Quantos conjuntos de dois ou mais inteiros positivos consecutivos são tais que a soma dos seus elementos é 500?

Vamos escrever k números inteiros positivos consecutivos como a, a+1,a+2...+a+k.

Sua soma é (2a+k+1)k/2, então (2a+k+1)k=1000. Então k é divisor de 1000 e como 2a+k+1 e k tem paridades diferentes só há 3 modos de decompor 1000 :

8x125, 40x25 e 200x5. Temos então 6 valores possíveis para k, mas para 3 deles (40,200 e125) a fica negativo.

Para k=8, temos a=58 e os números são 59,...,66

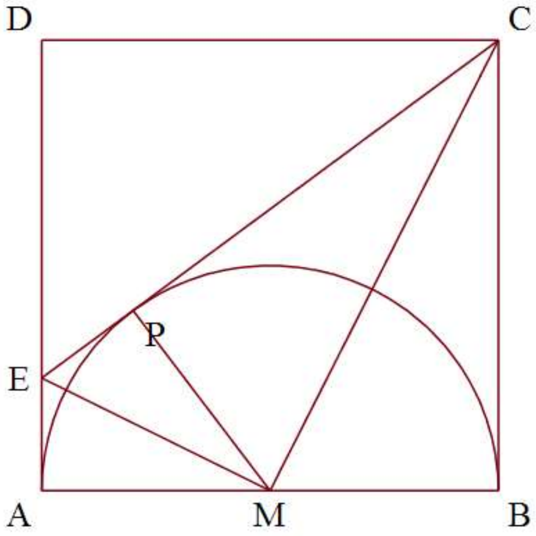
Para k=25, temos a=7 e os números são 8,...,32

Para k=5, temos a=97 e os números são 98,...,102

E a resposta é 3.

14. O triângulo ABC inscrito na circunferência Γ possui lado $AC = 13$, $AB = 15$ e $BC = 14$. Qual o maior raio possível de uma circunferência que tangencia o lado $\overline{BC}$ e o arco menor $\widehat{BC}$ de Γ?
    R: 2
15. Um quadrado $ABCD$ possui lado 20. Um semicírculo de diâmetro $\overline{AB}$ é construído no interior do quadrado. Seja E o ponto do lado $\overline{AD}$ tal que $\overline{CE}$ é tangente ao semicírculo. Qual o comprimento de $\overline{CE}$?

Sejam M o ponto médio de AB e P o ponto de tangência entre CE e o semicírculo. Como os triângulos BCM e PME são semelhantes e BM é a metade de CB, então PE é a metade de PM , logo PE=5, então CE=CP+PE=25, pois CP=CB=20;



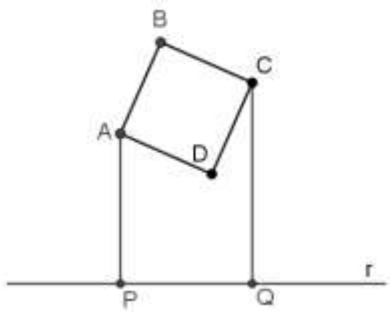
16. Sejam m e n inteiros positivos tais que $9^m - 4^n = 5537$. Quanto vale $m + n$?

    Começamos fatorando 5537=7x7x113.
    Temos: 3^{2m}- 2^{3n}= (3^m+2^n)(3^m-2^n)=7x7x113.
    Sejam u=3^m e v=2^n. Temos (u+v)(u-v)=7x7x113. Como u e v são inteiros positivos, temos duas possibilidades:
    u+v=113 e u-v=49, o que dá u=81=3^4 e v=32= 2^5. Então m=4 , n=5 e m+n=9.
    Outra possibilidade é u+v=7x113 e u-v= 7 o que dá valores de u e v que não são potências de 3 e 2. Logo a única solução é a encontrada.

    R:9.
17. Qual a soma de todos os números de 3 algarismos que são múltiplos de 45 e cujos dígitos, em alguma ordem, formam uma progressão aritmética?
    O número é múltiplo de 5 e de 9 . Então termina em 0 ou 5 tem soma de algarismos 9 ou 18.
    Se é ab0, temos a+b= 9 ou a+b=18 e para os algarismos estarem em p.a., devemos ter a=2b ou ao contrário, logo 3b=9 e b=3, logo a=6 ou 3b=18 e b=6, mas 2b=12 o que não pode. Então temos 360 e 630.
    Se é ab5, temos a+b=4 ou a+b=13. Com a+b=4, temos 0 e 4, ou 1 e 3 ou 2 e 2, mas para a b 5 estarem em p.a., só serve a solução 1 3 e temos os números 135 e 315.

Com a+b=13 temos 9e 4 ou 8 e 5 ou 7 e 6 , e apenas 7 e 6 satisfaz à condição de p.a.e temos os números 675 e 765. Somando os seis, dá 2880.

18. Dois subconjuntos do conjunto $S = \{a, b, c, d, e\}$ devem ser escolhidos de modo que sua união seja S e sua interseção possua exatamente dois elementos. De quantos modos essa escolha pode ser feita, supondo que a ordem em que os subconjuntos são escolhidos não importa?
R:40
19. Para cada inteiro positivo n, seja $f(n)$ o quadrado da soma dos algarismos de n. Por exemplo, $f(3) = 3^2 = 9$ e $f(273) = (2 + 7 + 3)^2 = 144$. Qual o valor de $f\left(f\left(f(\ldots(f(2))\ldots)\right)\right)$, onde f é aplicada 2021 vezes.
R:256
20. Na figura, $ABCD$ é um quadrado e r é uma reta exterior ao quadrado. Sejam P e Q pontos sobre r tais que AP e CQ são perpendiculares a r. Se a área do pentágono $PADCQ$ é igual a 99 e o produto $\overline{AP} \cdot \overline{CQ}$ é igual a 220, quanto vale a distância de D até a reta r?



R: 11.