OMERJ 2021- NÍVEL 2 resolvida

1. Em uma área de preservação ambiental foram plantadas 50 árvores por mês durante 10 anos. Quantas árvores foram plantadas no total?

50x12x10=**6000**

2. Um anfiteatro possui 968 poltronas para acomodar as pessoas. Cada poltrona está numerada de 1 até 968. Quantos algarismos serão gastos para numerar as poltronas de numeração ímpar?

De 1 a 9: 5 números ímpares de 1 algarismo. 5 algarismos
De 10 a 99: 90/2= 45 números ímpares de 2 algarismos. 90 algarismos
De 100 a 968: 868/2=434 números ímpares de 3 algarismos; 1302 algarismos
Somando, **1397** algarismos.

3. Encontre o menor número natural n, para o qual os números: $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, n^2$ podem ser divididos em dois grupos com a mesma soma.

Os números são 1 4 9 16 25 36 49 64 81 100...

Se n=2: {1,4} e não pode.

Se n=3: {1,4,9} e claramente não pode.

Vamos analisar começando pelo número maior.

Se n=4:{1 4 9 16} . Como 16>1=4+9, não dá.

Se n=5 {1 4 9 16 25}. Devemos ter 25 e 16 em subconjuntos diferentes.. Se 9 ficar com 25 não dá. Então 25 de um lado e 9 e 16 do outro. Falta colocar 1 e 4 . Mas as somas já estão iguais. Não vai dar certo.

Se n=6 {1 4 9 16 25 36} Temos 36+25>1+4+9+16=30. Então 25 está de um lado e 25 do outro. Como 16>1+4+9, devemos ter 16 junto com 25 e então 9 vai ficar junto com 36. Temos 25+16=41 e 36+9=45 e falta colocar 1 e 4.. Como a diferença é 4, não vai fechar.

Se n=7 {1 4 9 16 25 36 49}. Temos 36+49=85>1+4+9+16=30. Então 49 está de um lado e 36 do outro. Também: 49+25=74>36+1+4+9=50. Então 25 está do lado do 36 e 49 do outro lado. Se 16 estiver junto com 36 e 25, temos soma 77 deste lado, e ficam para o outro lado 49, 1, 4, e 9 somando 63. Então 16 está junto com 49 e temos {49 16} e {36 25 } faltando colocar 1 4 9 .Então 9 tem que ficar do lado da soma menor e temos {49,16} e {36 25 9} faltando 1 e 4 e a diferença das somas é 5 =4+1 . Então a divisão é

{49 16 4 1} e {36 25 9}.Ambos somam 70 e a resposta é n=**7**

4. Uma sacola contém bolinhas de gude vermelhas, azuis, verdes e laranja. As bolinhas vermelhas representam $\frac{1}{3}$ do total número de bolinhas, as bolinhas azuis representam $\frac{1}{5}$ do número total de bolinhas e as bolinhas verdes $\frac{2}{7}$ do total. Se a sacola contiver o menor número de bolinhas possível, quantas bolas de gude laranja há na sacola?

Sejam n o número total de bolinhas e b o número de bolinhas laranjas.

Então: n/3 + n/5 + 2n/7 +b = n. Segue que n(1-1/3 -1/5 -2/7)=b

Logo b/n = 19/105. Se n é o menor possível, temos n=105 e b=**19**, já que a fração é irredutível.

5. Um fio é cortado em duas partes, uma de comprimento a e outra de comprimento b. O pedaço de comprimento a é dividido em três pedaços iguais, para formar um triângulo equilátero e o pedaço de comprimento b é dividido em seis pedaços iguais, para formar um hexágono regular.

Sabendo que o triângulo equilátero e o hexágono regular assim formados têm a mesma área, escreva o valor de $\frac{a^2}{b^2}$ como uma fração irredutível p/q de inteiros positivos , e calcule p+q.

O lado do triângulo é a/3. Logo á área é $(a/3)^2(\sqrt{3})/4$.

O lado do hexágono é b/6; Então sua área é 6 vezes a área do triângulo equilátero de lado b/6, ou seja é 6 $(b/6)^2(\sqrt{3})/4$. Igualando as áreas vem

$a^2/9 = b^2/6$. Ou $a^2/b^2 = 6/9 = 2/3$. Logo p=2 e q=3 e p+q= **5**

6. Quantos números inteiros há entre $\sqrt{15}$ e $\sqrt{143}$?

$\sqrt{15} < n < \sqrt{143}$ é o mesmo que $15 < n^2 < 143$. E os quadrados entre 15 e 143 são 16 25 36 49 64 81 100 121 . E a resposta é **8.**

7. Suponha que 5 cartões rotulados de 1 a 5, sejam colocados aleatoriamente em 5 caixas também rotuladas de 1 a 5, um carta por caixa. A probabilidade de que nenhum cartão seja colocado em uma caixa com o mesmo rótulo do cartão, pode ser escrita na forma de uma fração irredutível, de inteiros positivos, $\frac{p}{q}$. O valor de $p + q$ é igual a:

Há 5 maneiras de escolher o cartão da caixa 1, e escolhido este catão , há 4 escolhas para a caixa 2, e 3 escolhas para caixa 3, 2 escolhas para a caixa 4 e 1 escolha para a caixa 5, ou seja um total de 120 possibilidades.
Vamos contar as possibilidades de termos pelo menos um cartão na caixa de mesmo número.
Se o cartão 1 está na caixa 1, o resto é à vontade, ou seja 4 opções para a caixa 2, 3 opções para a caixa 3, 2 opções para a caixa 4 e 1 opção para a caixa 5. O que dá 24 possibilidades. Da mesma forma se o cartão 2 está na caixa 2 , há 24 possibilidades, e igualmente para o 3 o 4 e o 5.
Então em 5x24=120 possibilidades há um cartão com o mesmo número da caixa. Mas houve repetições que devem ser descontadas.
Se 2 cartões estão nas respectivas caixas, por exemplo 1 2 , este caso foi contado 2 vezes, quando consideramos o caso cartão 1 na caixa 1 e quando consideram o caso cartão 2 na caixa 2.
Há 3 escolhas para a 3ª caixa, 2 escolhas para a 4ª caixa e 1 escolha para a 5ª caixa. Então para cada par de cartões há 6 repetições a serem descontadas. E há 10 pares possíveis de cartões. { 1 2, 1 3, 1 4, 1 5, 2 3,2 4, 2 5, 3 4, 3 5, 4 5}, então 60 possibilidades a descontar. E ficamos com 120-60.

Mas as que tinham 3 cartões nas caixas correspondentes foram contadas 3 vezes e descontadas 3 vezes e têm que ser repostas. Por exemplo, se tinham os cartões 1 2 3 nas respectivas caixas, foram descontadas no par 1 2, no par 1 3 e no par 2 3 .

. Para cada trio , como 1 2 3 nas caixas 1 2 3, há 2 possibilidades para a caixa 4 e 1 para a caixa 5 . então para cada trio, há 2 possibilidades a contar de novo, e são 10 trios, pois cada escolha de um par, gera uma escolha de um trio (os não escolhidos). Então já temos 120-60+20.

Da mesma forma as que tinham 4 cartões na caixa de mesmo número, precisam ser descontadas de novo e são 5 quartetos e uma possibilidade para cada quarteto. E a possibilidade de os 5 cartões estarem nas respectivas caixas tem que ser recontada. E temos finalmente 120-60+20-5+1=76.
Logo as que não têm nenhum cartão na caixa de mesmo número são 120-76=44 e a probabilidade é 44/120= 11/30 = p/q.

E a resposta é 11+30=**41**

8. Sabendo que há um único par ordenado (x, y), $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$, que é solução da equação: $(4x^2 + 6x + 4) \cdot (4y^2 - 12y + 25) = 28$, determine o valor de 2x+y.
Temos duas equações: $(4x^2 + 6x + 4) = b$ e $4y^2 - 12y + 25 = 28/b$.
Ambas devem ter raiz dupla para satisfazerem à condição de haver um único par (x,y). De fato escrevendo que o discriminante é zero nas duas, chegamos a b=7/4, o que dá x=-6/8 e y=12/8. Logo 2z+y=**0**.

9. A função de McCarthy (definida por John McCarthy, um dos fundadores da inteligência artificial) é definida usando-se a regra:

$$M(n) = \begin{cases} n - 10, se\ n > 100 \\ M(M(n + 11)), se\ n \leq 100 \end{cases}$$

Para todos os inteiros positivos n.
Usando sucessivamente a regra definida por $M(n)$, encontre M(99)+M(102).

M(102)=102-10-92.
M(99)=M(M(110))=M(100)=M(M(111))=M(101)=91
Somando: **183**

10- O número de divisores inteiros positivos de 2021^{2021} que são múltiplos de 2021^{2012} é igual a:

A decomposição de 2021 em fatores primos é 2021=43x47.

Então $2021^{2021} = 43^{2021}x47^{2021} = a^9xb^9$ sendo a= 43^{2012} e b= 47^{2012}.
Os divisores procurados são obtidos fazendo a e b variarem, de 0 a 9. A resposta é 10x10=**100**

11. Numa rua há dez casas. As casas estão em fila, lado a lado. De quantas maneiras é possível pintar todas as casas de azul, branco e castanho de modo que cada casa tenha um único vizinho com a casa pintada da mesma cor?

Se a 1ª casa é azul. A 2ª tem que ser azul. A 3ª tem que ser branca ou castanha. Vemos que as cores vão de 2 em 2 . Então é como se fossem 5 espaços para preencher sem repetição, Então são 3 escolhas para o 1º espaço, e 2 para cada um dos outros. A resposta é então 3x2x2x2x2=**48**

12. Determine o menor inteiro positivo que dividido por 37 deixa resto 7 e dividido por 41 deixa resto 20.

Queremos 37k+7=41m+20 mínimo;
37k-41m=13.
Temos 41=37+4 e 37=4x9+1 . Então 1= 37-4x9 =37-(41-37)x9=10x37-9x41
Logo 13=130x37-121x41 ou seja 20-7=130x37-117x41 ou
130x37+7 = 117x41+20 Vamos subtrair em ambos os lados o maior múltiplo de 37x41 que ainda deixa tudo positivo. Temos 130=3x41+7 e 117=3x37+6
Então subtraímos 3x37x41 de ambos os lados, ficando com
7x37+7=6x41+20 =**266**

13. Existem 600 assentos enfileirados, numa única fila. Qual é o menor número de assentos que devem estar ocupados, para que a próxima pessoa se sente ao lado de alguém?

Cada pessoa sentada bloqueia 3 assentos, o seu , o da esquerda e o da direita. Consideramos 200 grupos de 3 assentos e ocupando o do meio de cada grupo. Bloqueamos todos assentos. Com menos de 200 assentos ocupados, algum grupo de 3 fica com todos os assentos livres e dá para sentar mais uma pessoa no meio. Resposta:**200**

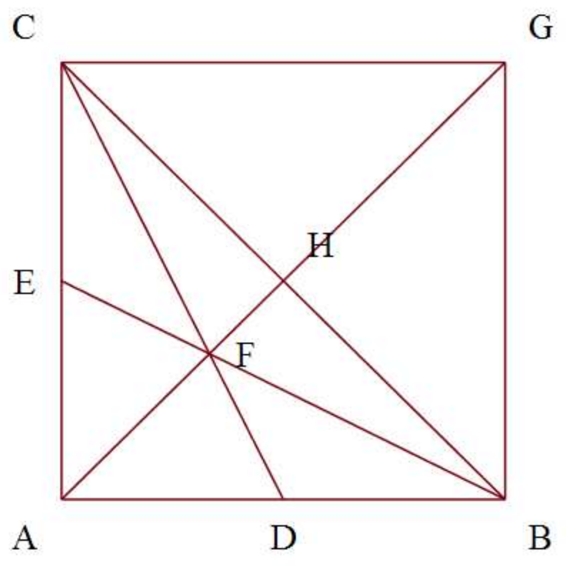
14. No clube dos Magos do Oriente, todos os sócios podem votar para escolher o presidente. Nas últimas eleições havia dois candidatos. O vencedor obteve o dobro dos votos do adversário. Os sócios Belchior, Baltazar e Gaspar não estavam presentes e foram os únicos sócios que não votaram.

Sabendo que 64% dos sócios votaram no vencedor, quantos sócios possuí o clube?
Sejam n o número de sócios, v o número de sócios que votaram no vencedor e p o número de sócios que votaram no perdedor.
Temos n=p+v+3, v=2p, 0,64n=v. Então, 0,64(3p+3)=2p o que dá p=24, e n=3x24+3=**75**

15. Quantos números de três dígitos, formados apenas por dígitos ímpares, são múltiplos de 9?
Os algarismos são 1 3 5 7 9 e a soma deve ser 9 ou 18 ou 27 para ser múltiplo de 9. Para ser 27 só se for 999, Não pode ser 18 porque 3 números ímpares somados dá ímpar. Então a soma é 9. E só podem ser 7 1 1 , ou 5 3 1 ou 3 3 3. Permutando: 117, 171, 711, 135, 153, 315, 351, 513 ,531,
Total **11**

16. ABC é um triângulo retângulo, com AB=AC=6. D é o ponto médio de AC, E é o ponto médio de AB, F é a interseção dos segmentos BD e CE. Ache a área do quadrilátero AEFD.

O triângulo é metade de um quadrado ABGC. Seja H o ponto de encontro da diagonais. Então F é o ponto de encontro das medianas de ABC, logo FH = 1/3 de AH, ou seja1/3 de 6(√2)/2 ou seja FH= √2.
Vamos denotar por a(ABC) a área do triângulo ABC, e do mesmo modo para as áreas dos outros polígonos.
AEFD é a interseção dos triângulos ACD e ABE. A união dos dois triângulos é ABC menos BCF. Então a área desta união é a(ABC)-a(BCF).
a(ABC) =6x6/2=18 e a(BCF)=6√2 x √2 /2 = 6. Então a área da união é 18-6=12 = a(ACD)+a(ABE)-a(AEFD) . Como a(ACD)=a(ABE)=9, temos a(AEFD)= 9+9-12 =**6**



17.Para cada par de números reais $a \neq b$, define-se a operação $\star$ por

$$(\mathrm{a} \star b) = \frac{a+b}{a-b}$$

Sabendo que $\big((2 \star 3) \star 4\big) = \frac{p}{q}$ com p e q inteiros positivos primos entre si, quanto vale $p+q$:

2*3= 5/(-1) = -5   e (-5)*4=(-1)/(-9) =1/9 . Então p+q=10.

18.Quantos inteiros positivos n satisfazem a seguinte condição:

$(145n)^{60} > n^{120} > 3^{180}$?

A condição equivale a $(145n)^{60} > (n^2)^{60} > (3^3)^{60}$, que equivale a

$145n > n^2 > 27$. Então n<145 da 1ª desigualdade e n>5 da 2ª.

Então n vai de 6 a 144, ou seja **139** números.

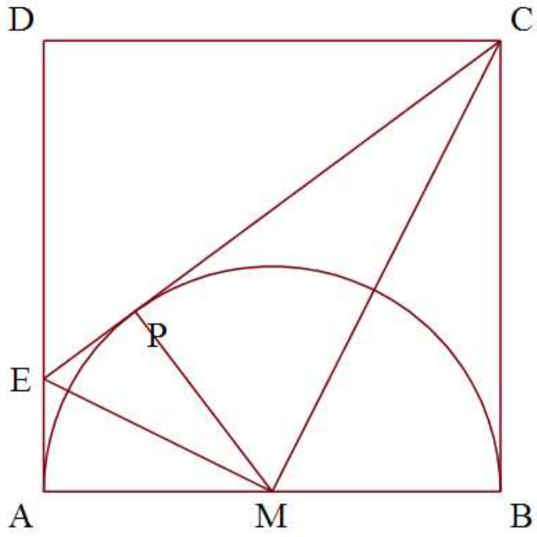
19. Um triângulo tem lados inteiros positivos a, b e c. Sabendo que $a = 3b$ e $c = 19$, qual o valor do maior perímetro possível desse triângulo?

Temos a+b>c , a+c>b e b+c>a ou seja 4b>19 , 3b+19 >b , b+19>3b

4b>19 e 19>2b ou seja 19<4b<38 . Então 4b vai de 20 a 36. O maior b possível é 9 e então a=27 e a+b+c= **55**

1. 20. Um quadrado $ABCD$ possui lado 20. Um semicírculo de diâmetro $\overline{AB}$ é construído no interior do quadrado. Seja E o ponto do lado $\overline{AD}$ tal que $\overline{CE}$ é tangente ao semicírculo. Qual o comprimento de $\overline{CE}$?

Sejam M o ponto médio de AB e P o ponto de tangência entre CE e o semicírculo. Como os triângulos BCM e PME são semelhantes e BM é a metade de CB, então PE é a metade de PM , logo PE=5, então CE=CP+PE=25, pois CP=CB=20;


D
C
P
E
A
M
B