

Prova Omerj- 2021- Nível 1 1ª fase resolvida

As questões que não tem solução fizeram parte também da prova de nível 2 e as soluções estão lá.

- 1) No último concurso para uma Universidade numa certa cidade, 35% dos estudantes resolveram os problemas da Prova de Matemática, cometendo erros. Sabe-se que 12% dos estudantes não resolveram nenhum problema na Prova de Matemática, $\frac{4}{25}$ dos inscritos não compareceram à prova e que os restantes, 6216 estudantes, resolveram todos os problemas corretamente. Quantos estudantes fizeram esse concurso?

Os estudantes estão divididos em 4 grupos: os que cometeram erros: 35%, os que não fizeram nada: 12%, os que faltaram: $4/25 = 16/100=16\%$, e os que acertaram tudo: 6216. Os três primeiros grupos juntos dão $(35+12+16)\% = 63\%$. Então os que acertaram tudo são 37%. Então o total é $6216 * 100 / 37 = 16800$.

- 2) Determine o menor inteiro positivo que dividido por 37 deixa resto 7 e dividido por 41 deixa resto 20.

Resposta: 266

- 3) Um anfiteatro possui 968 poltronas para acomodar as pessoas. Cada poltrona está numerada de 1 até 968. Quantos algarismos serão gastos para numerar as poltronas de numeração ímpar?

Resposta: 1397

- 4) Em 1945, o leite era entregue, em domicílio, em garrafas de 1 litro de vidro e era um leite puro. Nina, menina muito arteira, levava o leite para seu pai que possuía uma padaria e fazia entregas nas residências. Ela sempre ia com seu amigo Geninho que adorava cálculos. Um certo dia, indo entregar 5 litros de leite e sempre brincando, caiu e derramou meio litro de leite de uma das garrafas. Não pensou 2 vezes e completou a garrafa, com a água de uma bica de uma praça.

Continuou o seu trajeto e tropeçou, derramando novamente o líquido da mesma garrafa, pois não tinha fechado direito a tampa. Derramou dessa vez, 1/4 da garrafa de “leite”. Voltou a praça, abriu outra garrafa e completou a garrafa que tinha perdido o leite, com o leite dessa 2^a garrafa e completou a segunda garrafa com água. Avistou diversas crianças pobres e como ela sempre levava consigo a sua caneca com capacidade de 250ml, resolveu dar uma caneca de leite, na sua caneca, para algumas crianças, tirando o leite das garrafas com leite puro. Depois, ela novamente completou as garrafas com água. Geninho tomou nota de tudo e disse a ela que só restavam 62,5% de leite puro de toda a encomenda que estavam levando. Para quantas crianças Nina deu uma caneca de leite?

1º tombo: perdeu 0,5 litro. 2º tombo: perdeu $\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{2}$ litro , ou seja 0,125 de litro. Perda total: 0,625 de litro. Fico com 4,375 litros que corresponde a $4,375/5$ do total , ou seja 0,875 ou seja 87,5% . Como ficou com 62,5% , deu às crianças 25% dos 5 litros , ou seja $\frac{1}{4} * 5 = 1,25$ e, como cada criança recebeu 0,25 litros, foram 5 crianças.

- 5) Determine o resto da divisão do número

$$(10^0 + 10^1 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^{2021}) \text{ por } 7.$$

O número consiste de 2022 algarismos 1. Escrevo desta forma, (1111111...) e faço a divisão por 7. Quando chego no 6º algarismo 1, dá resto 0. Então vai começar a repetir. Com 2022 é múltiplo de 6, vai dar resto 0 no final.

- 6) A palavra LIBERDADE é uma senha que corresponde a um número, uma chave de segurança, onde cada letra é representada por um dos algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 6 ,8. Letras diferentes correspondem a algarismos diferentes e letras iguais correspondem ao mesmo algarismo. Foi dito a Augusto que ele teria que descobrir qual o valor da letra D na senha. Pistas começaram a ser colocadas. “O número LIBERDADE é par e divisível por 9”. Foi também dito a Augusto que a soma dos algarismos da senha era um número menor que 30, mas ele disse que, mesmo com essas informações ainda não conseguia descobrir o valor pedido. Então foi passada a última informação dizendo “O algarismo procurado é o menor entre os algarismos repetidos”, então ele disse : “Ah sim, agora consegui descobrir” e respondeu corretamente. Qual foi o algarismo que Augusto respondeu?

São 7 algarismos e nove letras, sendo duas repetidas:

D e E

Sabemos que E é par e que a soma é múltiplo de 9. Somando $0+1+2+3+4+6+8$ obtemos 24. Como a soma é menor que 30, só pode ser 27, e os repetidos são 0 e 3 ou 1 e 2. Então D pode ser 1 ou 3. Como D é o menor dos repetidos, D=1

7) O Bitcoin é a principal moeda digital existente hoje no mundo. Ao contrário das moedas nacionais, ela não é emitida por um banco central de um país e não está atrelada à política econômica de um governo.

O Bitcoin foi a primeira criptomoeda do mundo e há 12 anos funciona sem qualquer interrupção, baseada em uma rede descentralizada extremamente segura chamada Blockchain criada por Satoshi Nakamoto. Estima-se que o limite máximo de Bitcoins é 21 milhões, número definido pelo algoritmo do Bitcoin.

A moeda digital é “minerada” (encontrada), decifrando uma série de operações de criptografia (que mudam a cada 10 minutos), e exige uma enorme capacidade de processamento.

A menor fração de um real é um centavo (R\$0,01). Cada Bitcoin, por outro lado, pode ser dividido por cem milhões ou em até 8 casas decimais. A menor fração do Bitcoin é chamada de Satoshi, em referência ao pseudônimo do criador da moeda, e vale 0,00000001 BTC.

Em 2009 quando surgiu, 1 dólar = 1309,03 bitcoins. A primeira compra usando a moeda virtual bitcoin, foi feita na Flórida, há 11 anos, pelo programador Lazslo Hanyecz para pagar 2 pizzas. Ele pagou 10.000 bitcoins. Desde então o Bitcoin tem valorizado de modo vertiginoso.

Atualmente 1 Bitcoin = 35.500 dólares, 1 Dólar = R\$ 5,12.

Suponha que Lazslo Hanyecz tivesse pago pelas duas pizzas atualmente, o mesmo que pagou em 2010. Seu amigo Hans comeu $\frac{3}{8}$ de uma das pizzas e ficou de pagar a Lazslo a quantia proporcional ao que comeu. Qual o valor, em reais, atualmente, que Hans tem que pagar a Lazslo?

Hans comeu $\frac{3}{8}$ de uma pizza. Cada pizza custou 5000 bitcoins, então Hans pagará $\frac{3}{8} \times 5000 \times 35500 \times 5,12 = 340800000$ reais. (340 milhões e oitocentos mil)

8) Numa fila estão 19 pessoas, cada uma recebe um número de 1 a 19 como senha. Uma delas é sorteada, ganha um prêmio e logo em seguida, sai da fila. A média aritmética de todas as senhas que estavam antes da saída dessa pessoa, supera em 0,5 a nova média aritmética das senhas que restaram na fila. Qual a posição da pessoa que saiu da fila?

A média aritmética de 1 a 19 é a soma $(1+2+3+\dots+19)$ dividida por 19 ou seja $190/19 = 10$

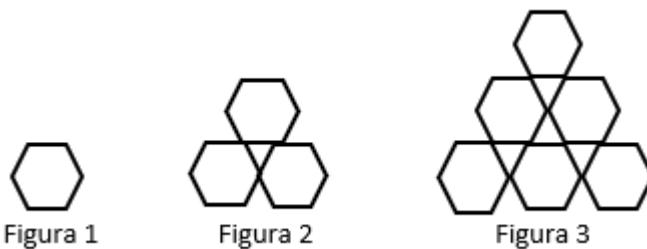
Da mesma forma, a nova média é a nova soma dividida por 18.

Então: nova média = 9,5 , e nova soma = $18 \times$ nova média = $18 \times 9,5 = 171$.

Nova soma = Velha soma menos o número removido

Como a velha soma é 190 e nova soma é 171, o número removido é 19.

9) Daiane construiu estruturas usando canudos de mesma medida em forma de hexágonos. A figura 1, mostra 1 hexágono com 6 canudos, na figura 2, construiu 3 hexágonos, conforme a figura, continuando com o mesmo procedimento para as figuras seguintes. Quantos canudos precisará ter para construir da figura 1 até a figura 10?



A figura 1 tem 1 hexágono. A figura 2 tem $1+2$ hexágonos. A figura 3 tem $1+2+3$ hexágonos, e assim por diante.

Então temos a quantidade de hexágonos:

$$\begin{aligned} & 1 + (1+2) + (1+2+3) + (1+2+3+4) + (1+2+3+4+5) + (1+2+3+4+5+6) + (1+2+3+4+5+6+7) \\ & + (1+2+3+4+5+6+7+8) + (1+2+3+4+5+6+7+8+9) + (1+2+3+4+5+6+7+8+9+10) = \\ & = 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 + 36 + 45 + 55 = 220. \end{aligned}$$

Multiplicando por 6, temos 1320 canudos.

Resposta: 1320

10) Qual o valor da expressão $(0,0625)^{-\frac{3}{4}}$?

$$(0,0625)^{-\frac{3}{4}} = (5^4 \times 10^{-4})^{-3/4} = 5^{-3} \times 10^3 = (10/5)^3 = 2^3 = 8.$$

11) Por lei, toda hora-extra de trabalho de um funcionário deve ser paga com acréscimo de 50% sobre o salário por hora. A empresa Pagabem paga a um de seus funcionários o equivalente a R\$550,00 por semana. Sabendo que ele trabalha 50 horas por semana e que ele fez 32 horas extras em uma das semanas, quanto ele deverá ganhar neste mês que teve 5 semanas de acordo com a lei? Resposta em reais.

Se ele trabalha 50 horas por semana e ganha 550 reais , ele ganha $550/50 = 11$ reais por hora. Então, ganhará $11 + 5,5 = 16,5$ reais por hora extra trabalhada.. Se fez 32 horas extras, ganhará nesta semana $32 \times 16,5 = 528$ reais de hora extra. Então neste mês de 5 semanas, ele ganha $5 \times 550 + 528 = 3278$ reais.

12) Luke Skywalker e Han Solo disputam uma corrida com suas naves espaciais. Luke completa cada volta da pista em 45 segundos e Han em 48 segundos. Luke e Han só se cruzam no momento em que Luke Skywalker termina a corrida. Quantas voltas tem a corrida?

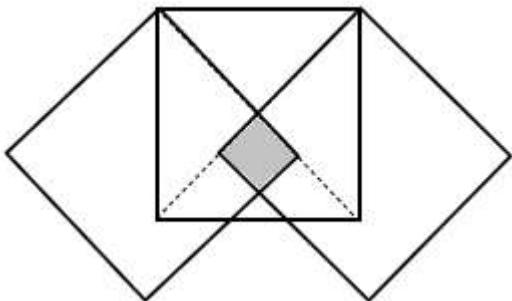
Eles vão se encontrar cada vez que o tempo decorrido for múltiplo comum de 45 e 48. A 1^a vez será no mínimo múltiplo comum.

$45 = 3 \times 3 \times 5$ e $48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$. O menor múltiplo comum é $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$.

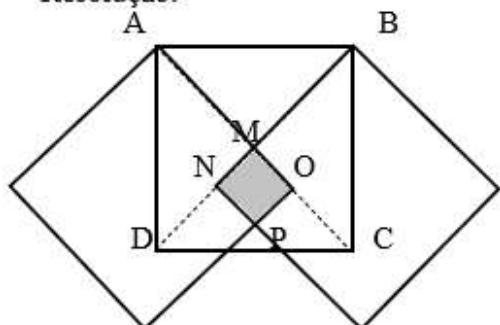
Dividindo este tempo por 45 teremos a quantidade de voltas que Luke deu.

$$(2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5) / (3 \times 3 \times 5) = 16.$$

13) Três quadrados formam a figura abaixo. Cada quadrado tem o lado medindo 10 m. Determine a área da região preenchida. (considere $\sqrt{2} = 1,4$). Resposta em m².

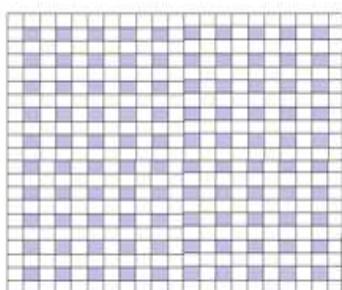


Resolução:



$$\begin{aligned} \text{med } DB &= 10\sqrt{2} & \text{med } MB &= 5\sqrt{2} & \text{med } NB &= 10 \\ \text{med } NM &= 10 - 5\sqrt{2} = 10 - 5 \cdot 1,4 = 10 - 7 = 3\text{m} \\ \text{NMOP é um quadrado} & & \text{Área NMOP} &= 3^2 = 9\text{m}^2 \end{aligned}$$

- 14) Um quadrado com 21 cm de lado é dividido em quadradinhos de 1 cm de lado por retas paralelas aos seus lados. Temos um quadriculado com 441 (21x21) quadradinhos. Qual a quantidade mínima de quadradinhos que precisam ser pintados para que, qualquer quadrado 2x2 (formado por 4 quadradinhos) tenha pelo menos um quadradinho pintado?



Filas sim, filas não possuem quadradinhos pintados, 11 filas sem pintura, 10 filas com pinturas, uma sim outra não. Nas filas pintadas, dos 21 quadrados da fila, são pintados um SIM e um não alternadamente, obtendo 10 filas com 10 pintados.

$$\text{Logo } 10 \times 10 = 100$$

15) Em um restaurante, todas as pessoas de um grupo pediram o mesmo prato principal e a mesma sobremesa. Com o prato principal o grupo gastou R\$ 56,00 e com a sobremesa R\$ 35,00; cada sobremesa custou R\$ 3,00 a menos do que o prato principal. Qual o preço do prato principal? Resposta em reais.

A diferença entre o custo dos pratos principais e das sobremesas foi de $56 - 35 = 21$ reais. Como a diferença de preços entre cada prato principal e cada sobremesa foi de 3 reais. Dividindo, vemos que eram 7 pessoas. Então cada prato principal custou $56 / 7 = 8$ reais.

16) Gramatura de um papel é o peso de uma folha desse papel com área de um metro quadrado. Uma folha de papel tamanho A4 mede 21,0 cm de largura por 29,7 cm de altura (ou seja, seu tamanho é 21,0 cm x 29,7 cm). Quanto pesa, em quilos, um pacote com 500 folhas tamanho A4 com gramatura 75g/m^2 , desprezando o peso da embalagem? Escreva sua resposta com TODAS as casas decimais encontradas. Respostas com valores aproximados serão consideradas erradas.

Cada folha pesa $0,21 \times 0,297 \times 0,075 \text{ kg}$. Multiplicando por 500 dá $2,338875 \text{ kg}$.

17) Roberta misturou quatro litros de água e dois litros de refresco num recipiente. O refresco é composto de 30% de suco e 70% de água. Depois de misturar tudo, que porcentagem do volume final representa o suco?

Dos litros de refresco tem 30% de suco, isto é $0,3 \times 2 = 0,6$ litros .

Então em 6 litros há apenas 0,6 de suco, ou seja $1/10$, ou 10%.

Resposta:10

18. Um matemático resolveu ter a seguinte rotina:

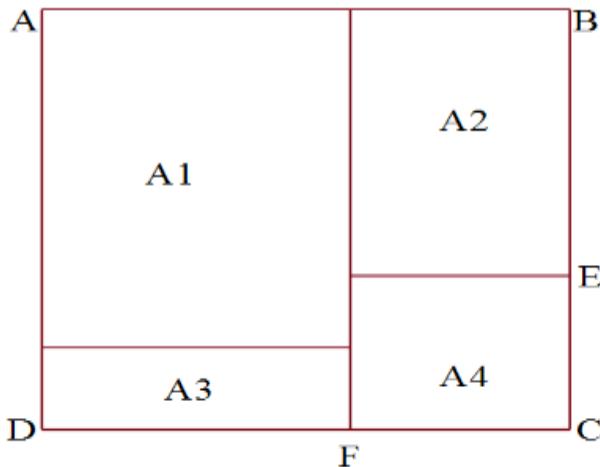
Acordar. Uma hora para banho, exercícios e refeição. Seis horas de estudo. Uma hora para refeição e descanso. Sete horas de estudo. Uma hora para refeição e relaxamento. Sete horas de sono. Acordar...

Se ele começou esta rotina acordando às 6 horas do dia 1 de maio, a que horas acordou no dia 9 de maio? Sua resposta deve ser um número inteiro de 0 a 23.

Somando as horas, vemos que o dia dele é de 23 horas.

Então : dia 1 acorda às 6, dia 2 acorda às 5, dia 3 acorda às 4, dia 4 acorda às 3, dia 5 acorda às 2, dia 6 acorda às 1, dia 7 acorda a zero hora, e acorda de novo dia 7 às 23 horas. Acorda dia 8 às 22 e dia 9 às 21.

19) Por herança, um grande terreno retangular foi dividido entre os três filhos de um rico empresário, conforme a figura abaixo . O lado AB mede 1250m e o lado AD mede 820m. O primeiro filho, o mais velho, ficará com a parte do terreno (A1 e A4) que possui 521000m^2 a mais que a parte do terreno que ficou para o filho mais novo (A3). Ao segundo filho, coube um terreno de forma quadrada com 520m de lado (A2). Calcule o valor da área que o filho mais velho recebeu. Resposta em m^2 .



Vamos usar a mesma notação para uma região e sua área, e para um segmento de reta e seu comprimento.

Como A2 é um quadrado de lado 520, temos $BE=520$, logo $EC=820-520=300$.

Então $A4=300 \times 520=156000$. Segue que $A1+A4=A1+156000=521000+A3$, ou seja $A1=521000-156000+A3$. ou $A1=365000+A3$.

Como $FC=520$, temos $DF=1250-520=730$. Logo $A1+A3=730 \times 820=598600$.

Substituindo A1 por $365000+A3$, vem $365000+A3+A3=598600$. Segue que $A3=116800$, e que $A1=365000+116800=481800$. Então

$$A1+A4=481800+156000=637800 \text{ m}^2$$

20. Durante a pandemia, Juju está fazendo brigadeiros para vender. Para fazer 40 brigadeiros, ela usa 1 lata de leite condensado, 10 g de manteiga, 30g de chocolate em pó e mexe durante 20 minutos no fogão. Depois, faz as bolinhas, usa 100 g de chocolate granulado e coloca em forminhas de papel. Ela compra uma lata de leite condensado por R\$5,00, um pacote de manteiga de 200g por R\$8,00, um pacote de 400 g de chocolate em pó por R\$8,00, um pacote de 1 kg de chocolate granulado por R\$20,00, um pacote de 100 forminhas por R\$5,00 e sabe que o gás do fogão custa R\$0,30 por hora. Qual é o menor preço de venda de cada brigadeiro que cobre as despesas? O preço deve ser um valor inteiro de centavos.

Vamos ver o custo de cada ingrediente:

1 lata de leite condensado R\$5,00

10 g de manteiga: 200 g custam R\$8,00, dividindo por 20 temos o custo de 10g: R\$0,04

30g de chocolate em pó: 400 g custam R\$8,00, dividindo por 40 temos o custo de 10g :R\$0,20 , e então 30g custam R\$0,60.

20min de gas: 1 hora= 60 minutos custa R0,30, logo 20 min custam R0,10.

100 g de chocolate granulado: 1kg custa R20,00, logo 100g custam R\$2,00

40 forminhas: 100 forminhas custam R5,00, logo 10 forminhas custam R0,50, e então 40 forminhas custam R2,00.

Custo total: $5+0,04+0,60+0,10+2+2=9,74$. Dividindo por 40 dá 0,2435 e como o preço tem que ser um número inteiro de centavos, a resposta é 25 centavos.

