Omerj 2020 nível 4 soluções.

Solução do problema 1

Evidentemente não há solução com 1 fechadura, pois quem tem a chave, abre o cofre sozinho. Da mesma forma não há solução com 2 fechaduras.

Vamos chamar de V o vice presidente, C1,C2,C3,C4 os chefes de setor, e 1 2 3 4...n, as fechaduras e suas respectivas chaves. Vamos analisar os casos n=3, 4, 5, 6,7, e ver que não há solução com n<7 e há solução com n=7.

Se V não tem chave, é preciso que cada um dos 4 chefes tenha todas as chaves e nesse caso ele sozinho abre o cofre.

Se V tem as chaves 1,2...k, cada chefe tem as chaves k+1,k+2,...n e para que haja solução com n chaves, é preciso haver solução com n-k chaves, envolvendo só os chefes de setor. Vamos então considerar só os chefes de setor, e fazer n-k= 3,4,5,6 .

Vamos exibir tabelas com 4 colunas, uma para cada chefe de setor, e na linha abaixo vamos preencher com as chaves. Não é necessário fazer n-k=1 ou 2, que são evidentes.

n-k=3

Se algum chefe tem 2 chaves, algum outro chefe tem a 3ª chave, e os dois juntos abrem o cofre. Então podemos supor que cada chefe só tem uma chave.

Tabela 1

C1	C2	C3	C4
1	2	3	1

Então C1 C2 e C4 juntos não abrem o cofre, nem C1, C3 e C4 juntos.

n-k=4

tal como acima, nenhum chefe tem 3 chaves.

Começamos com cada chefe com uma chave diferente.

Tabela 2

C1	C2	C3	C4
1	2	3	4

Para que C1 C2 C3 abram o cofre, é preciso que um deles tenha a chave 4. Suponhamos C1.

Tabela 3

C1	C2	C3	C4
1 4	2	3	4

Para que C2 C3 C4 abram o cofre, um deles deve ter a chave 1. Podemos supor C4. Temos

Tabela 4

C1	C2	C3	C4
1 4	2	3	1 4

Para que C1 C2 C4 abram o cofre, um deles deve ter a chave 3.Se for C1, C1 e C2 abrem

tabela 5

C1	C2	C3	C4
1 4 3	2	3	1 4

Do mesmo modo se for C4 , C2 e C4 abrem.

Tabela 6

C1	C2	C3	C4
1 4	2	3	1 3 4

Voltando na tabela 4, então C2 tem a chave 3.

Tabela 7

C1	C2	C3	C4
1 4	2 3	3	4 1

E vemos que C1 e C2 abrem o cofre.
E podemos voltar na tabela 2, e supor que começamos com C1 com as chaves 1 e 2. E certamente 3 e 4 estão com pessoas diferentes.

Tabela 8

C1	C2	C3	C4
1 2	3	4	

Para que C1 C3 C 4 abram o cofre, C4 deve ter a chave 3 e para que C1 C2 C4 abram o cofre, C4 deve ter a chave 4.

Tabela 9

C1	C2	C3	C4
1 2	3	4	3 4

Então C1 e C4 abrem o cofre. E não há solução com n-k=4.

Análises semelhantes levam a não existência de solução com n-k=5 e à solução a seguir com n-k=6.

Tabela 10

C1	C2	C3	C4
1 2 3	3 4 5	5 6 1	6 4 2

Para minimizar n, fazemos k=1 e temos a solução com 7 chaves, onde V tem as chaves 1 2 3 4 5 6, e os 4 chefes de setor têm as chaves da tabela 10, e todos têm também a chave 7. O presidente tem todas as chaves.

Solução do problema 2

$1/x + 1/y = 1/p$.

Resolvendo em y: $y = px/(x-p)$

1ª sol: $x-p=1$. Então $x=p+1$ e $y= p(p+1)$.

2ª sol: $x-p=p$. Então $x=y=2p$.

3ª sol: x é múltiplo de $x-p$. Então $x=k(x-p)$, ou seja $x= kp/(k-1)$. Então ou $k=2$ ou $k-1=p$. $k=2$ é a solução $x=2p$ já encontrada. $k=p+1$ é a solução $x=p+1$ também já encontrada.

Em termos de par ordenado, temos (2p,2p), (p+1,p(p+1), (p(p+1),p).

Para $p=2020$ temos estas 3 soluções e mais outras com $y=2020x/(x-2020)$. E basta pegar $x=2022$ para termos $x=2020*2022$ e $y= 2020*1010$, o que nos dá mais dois pares ordenados. Para mais soluções, basta tomar $x= 2020+a$, sendo a um divisor de 2020.

Solução do problema 3

Vamos usar a notação c^b para c elevado a b. Por exemplo 2^3=8.

Seja N = 760^1998 -20^1998 +1910^1998 – 652^1998.
Primeiro, veja que 1998 = 2 * 27 * 37 e, portanto, basta provar que N é múltiplo de 2, de 27 e de 37.
i) Como todas as parcelas de N são pares, N é claramente par.

ii) Olhando módulo 27, temos 760 == 4, 1910 == 20 e 652 == 4. Logo N == 4^{1998} - 20^{1998} + 20^{1998} - 4^{1998} == 0 (mod 27) e assim N é múltiplo de 27.

iii) Olhando módulo 37, temos 760 == 20, 1910 == 23 e 652 == 23. Logo N == 20^{1998} - 20^{1998} + 23^{1998} - 23^{1998} == 0 (mod 27) e assim N é múltiplo de 37.

Solução do problema 4.

Vamos usar a notação F(k) e L(k) para as duas sequências, com:
F(1) = F(2) = 1, L(1) = 1, L(2) = 3.

(a) Vamos calcular os restos da divisão de L(k) por 5:

1, 3, 4, 2, 1, 3, 4, 2, ...

Vemos que obtemos uma sequência periódica de período 4.
Como a definição é recursiva, a afirmação acima segue facilmente por indução.

(b) Vamos estender a definição de F(k) para trás, com F(0) = 0.
Mais geralmente, dados F(k+1) e F(k+2) temos F(k) = F(k+2) - F(k+1).

Vamos trabalhar módulo n.
Note que dado o par (x,y) = (F(k),F(k+1)) obtemos o par (y,z) = (F(k+1),F(k+2)) por z = x+y.
Reciprocamente, dado o par (y,z) = (F(k+1),F(k+2)), obtemos o par (x,y) = (F(k),F(k+1)) por x = z-y.
Assim, se listarmos os pares (F(0),F(1)), (F(1),F(2)), ..., (F(k), F(k+1)), ... (todos módulo n), devemos formar um ciclo (em no máximo n^2 passos).
Como F(0) = 0, deve existir um inteiro positivo k, $0 < k \leq n^2$, com F(k) = 0 (mod n), F(k+1) = 1 (mod n).