

Nível 4

Instruções

- A Prova tem uma duração de 4 horas.
- A Prova consta de 4 questões discursivas, todas de igual valor.
- Todas as soluções devem ser justificadas.
- Se você conseguir apenas soluções parciais, não deixe de registrá-las assim mesmo.
- Não é permitido o uso de calculadora nem consulta a livros ou notas.

PROBLEMA 1

A Diretoria de um Banco é composta por um Diretor, um Vice-Diretor e quatro Chefes de Setor. O Diretor resolve instalar um novo cofre. Manda fazer várias fechaduras e distribui as chaves de modo que:

- Cada chave abre exatamente uma fechadura.
- O cofre só é aberto se forem abertas todas as suas fechaduras.
- O Diretor possa abrir sozinho o cofre.
- O Vice-Diretor só possa abrir o cofre juntamente com um dos Chefes de Setor.
- Os Chefes de Setor só possam abrir o cofre em grupos de três.

a) Qual o número mínimo de fechaduras que se devem colocar no cofre para que este esquema seja possível? b) Nesse caso, quantas chaves cada um deve ter?

PROBLEMA 2

a) Encontre todas as soluções inteiras e positivas de

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{p}$$

onde p é um número primo. Cada solução é um par ordenado (a, b)

b) Encontre pelo menos 5 soluções inteiras e positivas de

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2020}$$

Problema 3

Mostre que o número $760^{1998} - 20^{1998} + 1910^{1998} - 652^{1998}$ é divisível por 1998.

PROBLEMA 4:

A sequência 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... é obtida a partir dos dois primeiros termos, de modo que cada termo é a soma dos dois anteriores. O mesmo ocorre com a sequência 1, 3, 4, 7, 11, 18, ...

Mostre que:

- a) nenhum termo da segunda sequência é múltiplo de 5;
- b) dado qualquer número inteiro positivo n , existe algum termo da primeira sequência que é múltiplo de n .