OMERJ 2020 nível 3 soluções

Problema 1.

Seja u o ângulo BAP. Então ∠ABP=60-u, ∠PCA=u , ∠PAC=60-u.
Sejam x=BP e y=CP. Pela lei dos senos nos triângulos APB e APC:
x/sen(u) =a/sen(60-u) e y/sen(60-u) =a/sen(u),
área BPC=xysen(120)/2 = $(a^2\sqrt{3})/4$

Problema 2

Sabemos que dado um numero inteiro, positivo, o resto de sua divisão por 9 é o mesmo que o da soma dos seus algarismos. Então, ao misturar os algarismos, obtemos um número com mesmo resto, log subtraindo um do outro, teremos um múltiplo de 9. Ao somar os algarismos deste novo número, teremos também um múltiplo de 9. Então ao retirarmos do número um algarismo não nulo, a soma vai se reduzir deste valor. Então o mágico soma os algarismos apresentados, e vê quanto falta para o próximo múltiplo de 9.

Problema 3.

Os números das casas são a+1, a+2,...a+17 para algum número a.
A média é então a+ (1+2+3+...+17)/17 = a +9.
Se queimou a casa a+i, a nova media é a+ (1+2+...17-i)/16.
Sabemos que (1+2+...+17)=9*17, logo a nova media é a+(9*17-i)/16 que é igual a: a+9-0,25. Logo i=13. Ou seja, a casa queimada foi a 13ª.

Problema 4

Pelo ponto B trace uma paralela ao lado CD. Seja E o ponto de interseção com AB. Então BE=CD e o ãngulo AEB é igual ao ângulo CDA.
Então no triângulo ABE, o ângulo B é 60 graus, pois os outros dois somam 120, e o lado BE é o dobro do lado AB. Uma solução é com um ângulo reto em A, e temos o triângulo 30,60,90, onde um cateto é a metade da hipotenusa. E não pode haver outra solução, pois partindo deste triângulo, mantendo o ângulo B em 60 graus e deslocando o ponto E ao longo da hipotenusa, o tamanho BE aumenta ou diminui, deixando de ser o dobro de AB. , Então os ângulos do trapézio são A=90, B=90,C=120, D=30.