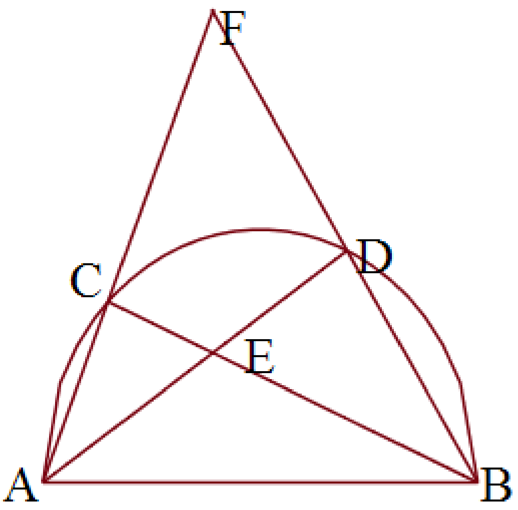
Omerj 2020   nível 2   soluções

Problema 1
O jogo começa com 75 e 57 no quadro e A joga. Escreve 18. P joga e só pode escrever 39 (57-18) . Agora A tem 2 opções escrever 36 (75-39) ou 21 (39-18). Os números serão sempre da forma 75a + 57b, com a e b inteiros, positivos ou negativos, de modo a termos um resultado positivo. Como o mdc de 75 e 57 é 3, dá no mesmo se o jogo começar com 25 e 29. Então todos os números de 1 a 28 vão aparecer, menos o 25 que já está e o jogo acaba com um numero impar de jogadas,logo ganha o 1º jogador, A.
Por que aparecem todos os números de 1 a 28? Seja p o menor número escrito no quadro quando o jogo acaba. Se p é 1 e falta algum número, por exemplo 12, então ainda há uma jogada possível: 13-1 =12.
Se p não é 1, por exemplo 3, então não há 4 nem 5, porque senão haveria mais jogadas: 5-3 ou 4-3. Da, mesma forma não há 7 nem 8, pois haveria as jogadas 7-3 e 8-3. Logo todos os números são múltiplos de 3, que contradiz a hipótese de a gente começar com números primos ente si. O mesmo raciocínio se aplica a qualquer valor,diferente de 1,que tenha o menor número. Logo o menor é1 e todos aparecem.

Problema 2.
Espada 1   corta 300 cabeças e nascem 84, então o número de cabeças diminui de 216.
Espada2 corta100 cabeças e nascem 370,então o número de cabeças aumenta de 270.
Como o mdc de 216 e 270 é 54, a quantidade de cabeças só pode aumentar ou diminuir de um múltiplo de 54.
Começando com 3996, para chegar em 2020, precisa diminuir de 1976, que não é múltiplo de 54, logo não é possível.
Se fosse um dragão com 3694 cabeças, aí seria possível pois
3694-2020=1674=54x31
Então queremos dois naturais k e m tais que 216k-270m=1674 , e dividindo por 54 fica 4k-5m=31, que tem solução k=9 e m=1.
Então ele usaria 9 vezes a espada 1 e 1 vez a espada 2.

Problema 3



a)Como AB é diâmetro, os ângulos ACB e ADB são retos, logo AD e BC são alturas no triângulo ABF, logo E é o ponto de encontro das alturas, então a altura por F também passa em E.
b) O arco CD é 70º . logo os ângulos CAE e CBD valem 35º cada. Então, no triângulo retângulo ACE, o ângulo AEC vale 55º e o BED também. Então o ângulo AEB vale 125 pois somado com BED dá 180, e o ãngulo CFD somado com os dois retos e com CED vale 360 (ângulos internos de um quadrilátero). Logo AFB vale 55º .
c)Como o ângulo AEB é constante quando E se desloca, temos um arco capaz, ou seja um arco de cìrculo.

Problema 4

Duas observações preliminares:

1.Se algum termo é 0, então $K=0=0^3$. Então podemos supor que todos os termos são não nulos.

2. Se um termo é negativo, há pelo menos 3 termos negativos, podendo haver 6 ou 9. Existir uma solução nestas condições é equivalente a existir solução com todos os termos positivos (é só tirar todos os sinais de menos). Então podemos considerar todos os termos inteiros positivos.

Decompondo todos os termos em fatores primos, dado um primo p, seja a o expoente de p na decomposição de A, b o expoente de p na decomposição de B, e assim por diante. Então p tem expoente k= a+b+c na decomposição de K, então, K ser um cubo, é equivalente a k ser múltiplo de 3. O problema se transforma em olhar a tabela

a	b	c
d	e	f
g	h	i

com a hipótese que as somas dos elementos das linhas, colunas e diagonais são iguais, e mostrar que a soma é múltipla de 3. Os termos da matriz são inteiros positivos, podendo ser 0.

Exemplos:

2	0	1
0	1	2
1	2	0

3	1	2
1	2	3
2	3	1

Temos o sistema linear de 7 equações em 9 incógnitas a b c d e f g h i.

$a+b+c=d+e+f$ $\qquad$ $a+b+c=c+f+i$

$a+b+c=g+h+i$ $\qquad$ $a+b+c=a+e+i$

$a+b+c=a+d+g$ $\qquad$ $a+b+c=c+e+g$

$a+b+c=b+e+h$

Resolvemos o sistema, isolando ‘a’ na 1ª equação e substituindo nas outras, ficando com 6 equações. Depois isolamos ‘b’ e substituímos nas outras e assim por diante. Verifica-se que uma equação desaparece (apenas 6 das 7 equações lineares são independentes) e chega-se a

$3a = 2g +2h -i$ $\qquad$ $3d=-2g +h +4i$

$3b= 2g-h +2i$ $\qquad$ $3e= g+h+i$

$3c=-g +3h+2i$ $\qquad$ $3f= 4g+h-2i$

Vamos verificar que g h i são múltiplos de 3, logo $k=g+h+i$ também é.

Subtraindo a 2ª equação da 1ª temos $3a-3b=3h-3i$ e somando a 3ª com a 5ª temos$3c+3e=4h+3i$.

Somando estas duas temos $3(a-b+c+e)=7i$, logo 7i é múltiplo de3, logo i é múltiplo de 3. De forma análoga verifica-se que g e h são também múltiplos de 3 .