

Olimpíada de Matemática do Estado do Rio de Janeiro 2020 Nível 2

Instruções

- A Prova tem uma duração de 4 horas.
- A Prova consta de 4 questões discursivas, todas de igual valor.
- Todas as soluções devem ser justificadas.
- Se você conseguir apenas soluções parciais, não deixe de registrá-las assim mesmo.
- Não é permitido o uso de calculadora nem consulta a livros ou notas.

PROBLEMA 1:

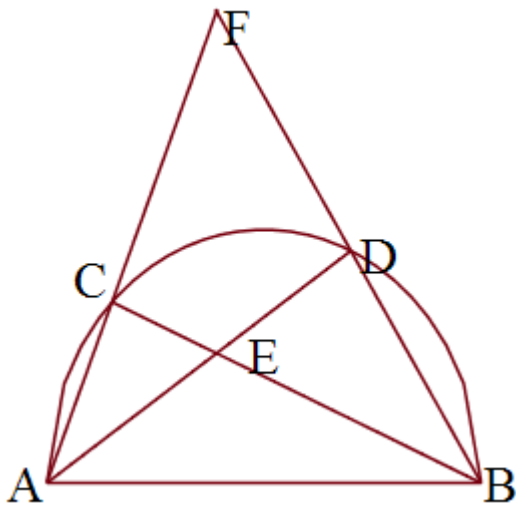
Antônio e Paulo disputam um jogo, com as seguintes regras. Dois números naturais são escritos no quadro. Antônio calcula a diferença entre o maior e o menor desses dois números, e escreve o resultado no quadro. Em seguida, Paulo escolhe dois números que já estejam no quadro e escreve no quadro a diferença entre o maior e o menor, desde que o resultado não repita um número que já esteja no quadro. Em seguida, Paulo e Antônio continuam a agir assim, ora um, ora outro. O jogo só pára quando um dos jogadores não tiver mais número para escrever, e então este jogador é o perdedor. Por exemplo, se os números iniciais forem 5 e 3, Antônio escreve 2, em seguida Paulo só pode escrever 1, e Antônio só pode escrever 4. Paulo então perde, pois não tem mais o que escrever. Agora, os números 57 e 75 estão escritos inicialmente no quadro, e Antônio começa o jogo. Pode-se garantir que um dos dois vai perder? Pode-se prever o número de jogadas em que o jogo vai terminar?

PROBLEMA 2:

Um dragão tem 3996 cabeças. Um cavaleiro tem uma espada capaz de cortar 300 cabeças, mas quando ele a usa, surgem imediatamente outras 84 cabeças; e tem uma outra espada capaz de cortar 100 cabeças, mas quando ele a usa, surgem imediatamente outras 370 cabeças. Pode o cavaleiro, através de uma sucessão de golpes de suas espadas, reduzir o número de cabeças do dragão a 2020? E se fosse um dragão de 3694 cabeças?

PROBLEMA 3:

Os pontos C e D estão em um semi-circunferência de diâmetro AB como mostra a figura abaixo: Os pontos C e D podem mover-se sobre a semi-circunferência, mas o arco CD é sempre constante e igual a 70° . a) Explique por que a reta EF é sempre perpendicular a AB. b) Calcule os ângulos AEB e AFB. c) Determine o conjunto das posições assumidas pelo ponto E quando os pontos C e D se movem sobre a semi-circunferência

**PROBLEMA 4:**

Um quadrado multiplicativo tem como propriedade que qualquer linha, qualquer coluna e as duas diagonais têm o mesmo produto. Isto é, pela figura abaixo:

$$ABC = DEF = GHI = ADG = BEH = CFI = AEI = CEG = K.$$

Mostre que se os números colocados no quadrado forem inteiros, então K (o produto comum) deve ser um cubo perfeito.

A	B	C
D	E	F
G	H	I