

## Olimpíada de Matemática do Estado do Rio de Janeiro 2020

### Nível 1

#### Instruções

- A Prova tem uma duração de 4 horas.
- A Prova consta de 4 questões discursivas, todas de igual valor.
- Todas as soluções devem ser justificadas.
- Se você conseguir apenas soluções parciais, não deixe de registrá-las assim mesmo.
- Não é permitido o uso de calculadora nem consulta a livros ou notas.

#### Problema 1

100 pessoas jogam a seguinte variação do jogo de bingo: Inicialmente, cada jogador escreve os números de 1 a 100 na ordem que desejar. Em seguida, o diretor do jogo sorteia sucessivamente os números de 1 a 100 em qualquer ordem. Cada jogador ganha 1 real por cada número de sua sequência que apareça na mesma posição na sequência sorteada. Sabendo que todos os participantes receberam quantias diferentes, prove que algum deles recebeu exatamente 100 reais.

PROBLEMA 2: Gustavo, Eduardo e Augusto disputam uma série de partidas de xadrez da seguinte maneira : dois deles jogam entre si e o vencedor joga com o que ficou de fora. Se o jogo terminar empatado, aquele que jogou com as peças brancas é considerado o perdedor. Ao final da série, Gustavo tinha jogado 15 partidas, Eduardo jogou 9 partidas e Augusto jogou 14 partidas. Quais foram os adversários na partida de número 13 ?

PROBLEMA 3: Calcule o produto de todos os números naturais menores que 100 e que tenham exatamente três divisores. Mostre que este número é um quadrado perfeito.

PROBLEMA 4: José criou uma sequência de inteiros positivos segundo três regras. Começando com um inteiro positivo, ele aplica ao resultado a regra apropriada, dentre as abaixo relacionadas, e continua sempre desta forma. Regra 1 : Se o inteiro for menor do que 10, multiplica-o por 9. Regra 2 : Se o inteiro for par e maior do que 9, divide-o por 2. Regra 3 : Se o inteiro for ímpar e maior do que 9, dele subtrai 5. Um exemplo de uma tal sequência é 23, 18, 9, 81, 76, ... Qual é o 2020º termo da sequência que começa com 98, 49, ...?