OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA
DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO - 2019

31 de agosto de 2019

Nível U

1. Considere a seguinte sequência $1, 2, 4, 3, 5, 7, 6, 8, 10, 12, 9, 11, 13, 15, 17, \ldots$, construída do seguinte modo: escrevemos o primeiro número ímpar, depois os dois primeiros números pares, depois os três ímpares seguintes, depois os quatro pares seguintes, depois os cinco ímpares seguintes e assim por diante. Denote por a_n o n-ésimo termo desta sequência. Calcule
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}.$$

2. Encontre todas as funções $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 (ou seja, derivável com derivada contínua) tais que
$$f(2x) = 2f(x) + 1$$
para todo x real.

3. Defina a função $f\colon \{0, 1, \ldots, n-1\} \to \{0, 1, \ldots, n-1\}$ por
$$f(x) = \frac{x^2 - x}{2} \pmod{n}.$$
Para que valores de n, esta função é bijetora?
Observação: A notação $a \pmod{n}$ representa o resto da divisão de a por n.

4. Seja p um número primo e considere A e B matrizes $p \times p$ com entradas reais. Suponha que
$$(AB - BA)^p + (AB - BA)^{p-1} + (AB - BA)^{p-2} + \ldots + (AB - BA) = 0.$$
Prove que $AB = BA$.

5. Seja n um inteiro positivo. Calcule
$$\sum_{1 \le a_1 < a_2 < \ldots < a_n \le 2n} (2 - a_1)(4 - a_2) \cdots (2n - a_n),$$
onde a soma percorre todas as sequências crescentes $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ com termos no conjunto $\{1, 2, \ldots, 2n\}$.