OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO - 2019

31 de agosto de 2019

Nível 4 (3^o ano do ensino médio)

1. Considere a seguinte sequência $1, 2, 4, 3, 5, 7, 6, 8, 10, 12, 9, 11, 13, 15, 17, \ldots$, construída do seguinte modo: escrevemos o primeiro número ímpar, depois os dois primeiros números pares, depois os três ímpares seguintes, depois os quatro pares seguintes, depois os cinco ímpares seguintes e assim por diante.

   (a) Qual número desta sequência ocupa a posição 2019?

   (b) Em qual posição encontra-se o número 2019 nesta sequência?

   Observação: Por exemplo, o número 1 se encontra na primeira posição, o número 4 na terceira posição e o número 10 está na nona posição.

2. Seja $n \geq 2$ um número inteiro. Considere um polígono regular de $2n$ lados $A_1A_2\ldots A_{2n}$. De quantas maneiras podemos pintar os vértices deste polígono com as cores azul e vermelho de forma que todo retângulo com vértices no conjunto $\{A_1, A_2, \ldots, A_{2n}\}$ possua pelo menos dois vértices pintados com cores distintas?

3. Determine todos os algarismos não nulos distintos dois a dois O, M, E, R e J tais que

$$\frac{(OM)_{10}}{(ERJ)_{10}} = 0, ERERERERERERER\ldots$$

   Observações:

   (a) As notações $(OM)_{10}$ e $(ERJ)_{10}$ denotam as representações decimais de ambos os números.

   (b) A notação $0, ERERERERERERER\ldots$ denota a dízima periódica com período $(ER)_{10}$.

4. Sejam ABC um triângulo e $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ e $\overline{CF}$ suas alturas, com D, E e F nos lados $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ e $\overline{AB}$, respectivamente. Suponha que o ortocentro H é o ponto médio da altura $\overline{AD}$. Determine o menor valor possível que

$$\frac{\overline{HB}}{\overline{HE}} + \frac{\overline{HC}}{\overline{HF}}$$

   pode assumir.

Esta prova possui uma segunda página.

OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA
DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO - 2019

31 de agosto de 2019

Nível 4 (3^o ano do ensino médio)

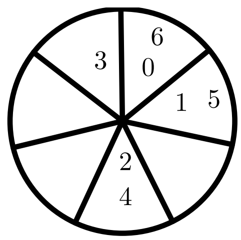
5. Seja n um inteiro positivo. Divide-se um círculo em n setores circulares iguais. Considere o seguinte processo:

   (i) Inicialmente, coloca-se uma joia em um dos setores e escreve-se o número 0 neste setor.

   (ii) Na etapa 1, move-se a joia um setor, no sentido horário, e escreve-se o número 1 no novo setor onde a joia está.

   (iii) Na etapa k, move-se a joia k setores, no sentido horário, e escreve-se o número k no novo setor onde a joia está.

   Terminamos o processo ao fim da etapa $n-1$. Para quais valores de n, ao fim do processo, todos os setores possuem um número escrito?
   Abaixo, encontra-se o resultado final do processo para $n = 7$.



6 Seja n um inteiro positivo. Calcule

$$\sum_{1 \leq a_1 < a_2 < \ldots < a_n \leq 2n} (2-a_1)(4-a_2)\cdots(2n-a_n),$$

onde a soma percorre todas as sequências crescentes $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ com termos no conjunto $\{1, 2, \ldots, 2n\}$.