OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO - 2019

31 de agosto de 2019

Nível 3 (1^o e 2^o anos do ensino médio)

1. Na figura 1 há um tabuleiro com números nas suas casas. Em cada passo, pode-se somar 1 a cada casa de uma linha, somar 1 a cada casa de uma coluna, subtrair 1 de cada casa de uma linha ou subtrair 1 de cada casa de uma coluna. Mostre uma série de passos que transforme o tabuleiro da figura 1 no tabuleiro da figura 2.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Figura 1:

5	5	5
5	5	5
5	5	5

Figura 2:

2. Considere um decágono regular $A_1A_2\ldots A_{10}$. De quantas maneiras podemos pintar os vértices deste decágono com as cores azul e vermelho de forma que todo retângulo com vértices no conjunto $\{A_1, A_2, \ldots, A_{10}\}$ possua pelo menos dois vértices pintados com cores distintas?

3. Determine todos os algarismos não nulos distintos dois a dois O, M, E, R e J tais que

$$\frac{(OM)_{10}}{(ERJ)_{10}} = 0, ERERERERERERER\ldots$$

Observações:

(a) As notações $(OM)_{10}$ e $(ERJ)_{10}$ denotam as representações decimais de ambos os números.

(b) A notação $0, ERERERERERERER\ldots$ denota a dízima periódica com período $(ER)_{10}$.

4. Encontre todos os inteiros positivos n tais que n^2 pode ser escrito como soma de exatamente n quadrados perfeitos não nulos. Por exemplo, $3^2 = 9$ pode ser escrito como $3^2 = 2^2 + 2^2 + 1^2$.

5. No triângulo acutângulo ABC, as alturas $\overline{BE}$ e $\overline{CF}$ se intersectam em H, com E no lado $\overline{AC}$ e F no lado $\overline{AB}$. Suponha que o circuncentro de ABC pertence ao segmento $\overline{EF}$. Demonstre que $\overline{HA}^2 = \overline{HB}^2 + \overline{HC}^2$.

6. Seja n um inteiro positivo. Divide-se um círculo em n setores circulares iguais. Considere o seguinte processo:

   (i) Inicialmente, coloca-se uma joia em um dos setores e escreve-se o número 0 neste setor.

   (ii) Na etapa 1, move-se a joia um setor, no sentido horário, e escreve-se o número 1 no novo setor onde a joia está.

   (iii) Na etapa k, move-se a joia k setores, no sentido horário, e escreve-se o número k no novo setor onde a joia está.

   Terminamos o processo ao fim da etapa $n - 1$. Para quais valores de n, ao fim do processo, todos os setores possuem um número escrito?
   Abaixo, encontra-se o resultado final do processo para $n = 7$.