



OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA
DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 2019
Nível 2 (8º e 9º anos do Ensino Fundamental)

31 de agosto de 2019.

Caderno de Questões

Parte A

Questão 1. Seja $abcd$ um número inteiro positivo formado por 4 dígitos inteiros não nulos, que podem ser iguais ou diferentes. Sabendo que

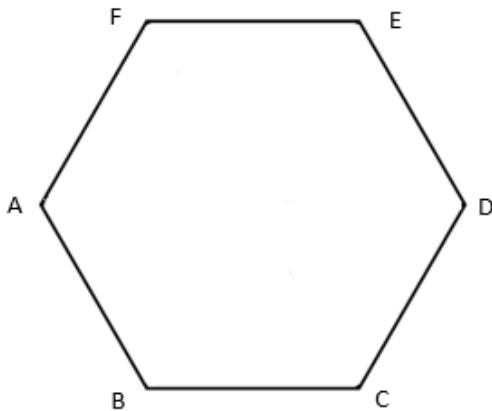
$$3400 < abcd < 3700$$

e que

$$abcd = a^a + b^b + c^c + d^d,$$

determine o número $abcd$.

Questão 2. Considere o hexágono regular ABCDEF de lado 1. Determine a razão entre as áreas do triângulo CDF e o quadrilátero BCDE.



Questão 3. Considere a sequência a seguir:

$$8, 88, 888, 8888, 88\ 888, \dots$$

Qual é a soma dos algarismos do menor número desta sequência que é divisível por 792?

Questão 4. O jogo da senha.

Este jogo deve ser jogado por duas pessoas, digamos J_1 e J_2.

Um dos jogadores deve criar uma senha composta por **quatro cores distintas, escolhidas dentre as 6 cores disponíveis**. Esta senha será anotada e guardada por um dos jogadores, digamos o jogador J_1 e não poderá ser visualizada pelo jogador J_2.

O jogador J_2 tentará descobrir a senha criada pelo jogador J_1. Para tal, o jogador J_2 deverá escolher uma senha aleatória de 4 cores e colocá-la na primeira coluna, denominada Tentativa, do tabuleiro (imagem abaixo).

Tentativa	Análise
○ ○ ○ ○	○ ○ ○ ○
○ ○ ○ ○	○ ○ ○ ○
○ ○ ○ ○	○ ○ ○ ○
○ ○ ○ ○	○ ○ ○ ○
○ ○ ○ ○	○ ○ ○ ○

O jogador J_1 irá analisar a senha escolhida pelo jogador J_2 e deverá preencher a segunda coluna do tabuleiro (imagem acima), denominada Análise, cumprindo as seguintes regras:

- Seguirá a ordem dos círculos da esquerda para a direita na segunda coluna, denominada Análise, do tabuleiro;
- **Se a cor estiver correta e na posição correta** (isto é, a cor pertence à senha escolhida pelo jogador J_1 e está no círculo correto), o jogador J_1 preencherá completamente o círculo analisado:
- **Se a cor estiver correta, mas na posição errada** (isto é, a cor pertence à senha escolhida pelo jogador J_1 mas não está no círculo correto), o jogador J_1 marcará um X no círculo analisado:
- **Se nenhuma das alternativas anteriores acontecer** (isto é, a cor não pertence à senha escolhida pelo jogador J_1), o jogador J_1 deixará o círculo analisado em branco:

Imagine que o jogador J_2 errou a primeira tentativa e recebeu a seguinte análise:



Qual é o maior número possível de senhas diferentes que o jogador J_2 pode tentar, afim de acertar a senha escolhida pelo jogador J_1?

Parte B

Questão 5. Resolva o sistema de equações:

$$\begin{cases} (x+y)^3 = z \\ (y+z)^3 = x \\ (z+x)^3 = y \end{cases}$$

Questão 6. Uma sequência numérica é formada da seguinte maneira: ela começa com o primeiro número ímpar positivo, em seguida colocam-se os dois primeiros números pares positivos, em seguida os três próximos números ímpares positivos, depois os quatro próximos números pares positivos e assim sucessivamente, ou seja,

$$1, 2, 4, 3, 5, 7, 6, 8, 10, 12, 13, 15, 17, 19, 21, \dots$$

- a) Qual a posição do número 2019 nesta sequência?
- b) Nesta sequência, na posição 1 está o número 1, na posição 2 está o número 2, na posição 5 está o número 5 e na posição 8 está o número 8. Existem outras posições n em que se encontra o número n ? Se sim, quais? Justifique.

Questão 7. Num lado quadrilátero convexo KLMN, o lado MN é perpendicular à diagonal KM, o lado KL é perpendicular à diagonal LN, $MN = 65$ e $KL = 28$. A reta passando por L perpendicular ao lado KN intersecta diagonal KM em O, com $KO = 8$. Encontrar a medida do segmento MO.

Questão 8. Ao estudar teoria dos números na Matemática, podemos nos deparar com diversos números interessantes. Como exemplo, apresentamos os **números felizes**. Eles são definidos pelo seguinte procedimento:

Escolha um número inteiro positivo qualquer. Este número será substituído pela soma dos quadrados dos seus dígitos. O resultado encontrado será substituído pela soma dos quadrados dos seus dígitos. Este processo será repetido até que o número obtido seja igual a 1 ou até que se entre num ciclo infinito que não inclui o 1. Quando a sequência calculada resulta em 1, o número inicial que foi submetido ao processo é chamado de **número feliz**. Caso contrário, teremos um **número infeliz**.

- a) O ano de 2019 é representado por um número feliz ou infeliz? Justifique.
- b) O número 20 é feliz ou infeliz? Justifique.
- c) Determine um número de três dígitos diferentes que seja infeliz. Justifique.