OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO - 2018

1^o de setembro de 2018

Nível U

1. Encontre todos os valores reais que a pode assumir de modo que o sistema

$$\begin{cases} x^3 + y^2 + z^2 = a \\ x^2 + y^3 + z^2 = a \\ x^2 + y^2 + z^3 = a \end{cases}$$

possua solução com x, y, z reais distintos dois a dois.

2. Seja ABC um triângulo equilátero de área 1. Seja também D_1 um ponto qualquer do lado AB. Defina os pontos D_n, E_n e F_n do seguinte modo: E_n é o pé da perpendincular por D_n a BC, F_n é o pé da perpendicular por E_n a AC e D_{n+1} é o pé da perpendicular por F_n a AB. Encontre $\lim_{n\to\infty}$ Área$(D_n E_n F_n)$.

3. Sejam a, b e c as raízes do polinômio $x^3 - 13x^2 + 25x - 12$. Calcule

$$\int_0^\infty \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)(x^2+c^2)} \mathrm{d}x.$$

4. Sejam $a_1, \ldots, a_n$ números reais. Considere $G = (g_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n}$ a matriz $n \times n$ tal que $g_{i,j} = \delta_{i,j} + a_i a_j$.

   (a) Determine os autovalores de G.

   (b) Determine a inversa da matriz G.

   Observação: O delta de Kronecker $\delta_{i,j}$ é definido por

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}.$$

5. Calcule

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \left(\sum_{m=1}^{n} n \bmod m \right),$$

onde n mod m é o resto da divisão Euclideana de n por m.