OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA
DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO - 2018

1^o de setembro de 2018

Nível 4 (3^o ano do ensino médio)

1. Sejam ABC um triângulo e k um número real positivo menor do que 1. Tome A_1, B_1 e C_1 pontos nos lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ de modo que

$$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{B_1C}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{C_1A}}{\overline{AB}} = k.$$

   (a) Calcule em função de k a razão entre as áreas dos triângulos $A_1B_1C_1$ e ABC.

   (b) Mais geralmente, para todo $n \geq 1$, constrói-se o triângulo $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$, de modo que A_{n+1}, B_{n+1} e C_{n+1} sejam pontos nos lados $\overline{B_nC_n}$, $\overline{A_nC_n}$ e $\overline{A_nB_n}$ satisfazendo

$$\frac{\overline{A_{n+1}B_n}}{\overline{B_nC_n}} = \frac{\overline{B_{n+1}C_n}}{\overline{A_nC_n}} = \frac{\overline{C_{n+1}A_n}}{\overline{A_nB_n}} = k.$$

   Determine os valores de k de modo que a soma das áreas de todos os triângulos $A_nB_nC_n$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$, seja igual a $\dfrac{1}{3}$ da área do triângulo ABC.

2. Seja (a_n) uma sequência de números inteiros tal que $a_1 = 1$ e para $n \geq 1$ inteiro positivo, $a_{2n} = a_n + 1$ e $a_{2n+1} = 10a_n$. Quantas vezes o número 111 aparece nessa sequência?

   A tabela abaixo mostra os 31 primeiros termos desta sequência:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
a_n	1	2	10	3	20	11	100	4	30	21	200	12	110	101	1000	5

n	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	$\cdots$
a_n	40	31	300	22	210	201	2000	13	120	111	1100	102	1010	1001	10000	$\cdots$

3. Sejam n e k inteiros positivos. Uma função $f : \{1, 2, 3, 4, \ldots, kn-1, kn\} \to \{1, \ldots, 5\}$ é dita *boa* se $f(j+k) - f(j)$ é múltiplo de k para todo $j = 1, 2, \ldots, kn-k$.

   (a) Prove que se $k = 2$, então a quantidade de funções boas é um quadrado perfeito para todo n inteiro positivo.

   (b) Prove que se $k = 3$, então a quantidade de funções boas é um cubo perfeito para todo n inteiro positivo.

4. Encontre todos os valores reais que a pode assumir de modo que o sistema

$$\begin{cases} x^3 + y^2 + z^2 = a \\ x^2 + y^3 + z^2 = a \\ x^2 + y^2 + z^3 = a \end{cases}$$

   possua solução com x, y, z reais distintos dois a dois.

5. Sejam Γ_1 e Γ_2 circunferências com centros O_1 e O_2, respectivamente, tangentes exteriormente. Sejam A e B pontos sobre Γ_1 e Γ_2, respectivamente, tais que a reta $\overleftrightarrow{AB}$ é tangente comum externa a Γ_1 e Γ_2. Sejam C e D pontos no semiplano determinado por $\overleftrightarrow{AB}$ que não contém O_1 e O_2 tais que $ABCD$ é um quadrado. Se O é o centro deste quadrado, determine os possíveis valores do ângulo $O_1\widehat{O}O_2$.

6. Dois quadrados perfeitos são ditos *amigáveis* se um é obtido a partir do outro acrescentando o dígito 1 à esquerda. Por exemplo, $1225 = 35^2$ e $225 = 15^2$ são amigáveis. Prove que existem infinitos pares de quadrados perfeitos amigáveis e ímpares.