OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA
DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO - 2018

1^o de setembro de 2018

Nível 3 (1^o e 2^o anos do ensino médio)

1. Um número natural é chamado de *factorion* se ele é igual a soma dos fatoriais dos seu dígitos decimais. Encontre todos os números de 3 dígitos que são factorions.

   Observação: O fatorial de um número inteiro não negativo é definido da seguinte forma: $0! = 1$ e para $n \geq 1$ inteiro positivo, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot (n-1) \cdot n$. Por exemplo, $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$.

2. Considere um triângulo equilátero ABC de lado 1. Um círculo C_1 é construído tangenciando os lados AB e AC. Um círculo C_2, de raio maior que o raio de C_1, é construído tangenciando os lados AB e AC e tangenciando externamente o círculo C_1. Sucessivamente, para $n \geq 1$ inteiro positivo, o círculo C_{n+1}, de raio maior que o raio de C_n, tangencia os lados AB e AC e tangencia externamente o círculo C_n. Determine os possíveis valores para o raio de C_1 de forma que caibam 4, mas não 5 círculos dessa sequência, inteiramente contidos no interior do triângulo ABC.

3. Seja n um número inteiro positivo. Uma função $f : \{1, 2, 3, \ldots, 2n-1, 2n\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$ é dita *boa* se $f(j+2)$ e $f(j)$ têm a mesma paridade para todo $j = 1, 2, \ldots, 2n-2$. Prove que a quantidade de funções boas é um quadrado perfeito.

4. Seja ABC um triângulo acutângulo inscrito na circunferência Γ. Sejam D e E pontos em Γ tais que $\overline{AD}$ é perpendicular a $\overline{BC}$ e $\overline{AE}$ é diâmetro. Seja F o ponto de interseção de $\overline{AE}$ com $\overline{BC}$. Prove que se $D\widehat{A}C = 2D\widehat{A}B$, então $\overline{DE} = \overline{CF}$.

5. Sejam n um inteiro positivo e $\sigma = (a_1, \ldots, a_n)$ uma permutação de $\{1, \ldots, n\}$. O *número de cadência* de σ é o número de blocos decrescentes maximais. Por exemplo, se $n = 6$ e $\sigma = (4, 2, 1, 5, 6, 3)$, então o número de cadência de σ é 3, pois σ possui 3 blocos $(4, 2, 1)$, (5), $(6, 3)$ descrescentes e maximais. Note que os blocos $(4, 2)$ e $(2, 1)$ são decrescentes, mas não são maximais, já que estão contidos no bloco $(4, 2, 1)$.

   Calcule a soma das cadências de todas as permutações de $\{1, \ldots, n\}$.

6. Dois quadrados perfeitos são ditos *amigáveis* se um é obtido a partir do outro acrescentando o dígito 1 à esquerda. Por exemplo, $1225 = 35^2$ e $225 = 15^2$ são amigáveis. Prove que existem infinitos pares de quadrados perfeitos amigáveis e ímpares.