



**OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA
DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 2018**
Nível 2 (8º e 9º anos do Ensino Fundamental)

1 de setembro de 2018.

parte A

Questão 1. “Criando Sequências”

É um jogo no qual, seguindo alguns passos, construímos sequências. O jogo é composto de um bloco de cartas contendo números inteiros positivos, e outras cartas contendo perguntas.

1. É sorteada uma carta no bloco de cartas de números inteiros.
2. Se o número for menor ou igual a 50, multiplicamos o número por 5.
3. Se o número for maior que 50:
 - 3.1. E se for par, então dividimos o número por 2.
 - 3.2. E se for ímpar, subtraímos do número, 15.

Exemplo de uma sequência pronta: 49, 245, 230, 115, 100, ...

O jogo é jogado em duplas. Antônio pega uma carta com o número 64 no bloco de cartas de números inteiros e constrói a sequência

64, 32, 160, 80, ...

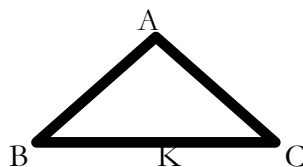
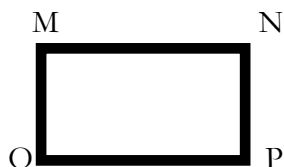
Pedro pega uma carta com o número 27 no bloco de cartas de números inteiros e constrói a sequência

27, 135, ...

Eles formam uma dupla no jogo e logo em seguida, pegam uma carta no bloco de perguntas onde está escrito:

“Determine a soma dos números que ocupam a posição 2018ª nas duas sequências formadas por cada elemento da dupla.” Que número será a resposta dessa pergunta?

Questão 2. Duas fazendas possuem juntas uma área de $2,88 \text{ km}^2$. A primeira tem o formato de um retângulo e a segunda de um triângulo isósceles como mostra a figura abaixo.



O comprimento MN na primeira fazenda é quatro vezes a distância do Pomar (A) ao Canil (K) da segunda fazenda. A distância da casa(C) à horta(B) na segunda fazenda é, oito vezes a largura NP da primeira fazenda e também é o dobro do comprimento MN da primeira fazenda. Sabe-se que na segunda fazenda, a distância da casa(C) ao canil(K) é igual à

distância do canil(K) à horta (B). A cerca que liga a casa ao pomar mede 2473,8m. Determine quantos metros de muro serão necessários para cercar as duas fazendas.

Questão 3. - O saudoso mestre Paulino do Cangaço via Matemática em tudo. Quando ele colocava uma data no quadro na forma dia/mês, ele colocava logo abaixo a soma de seus algarismos. Por exemplo, para o dia 1 de setembro, ele escreveu na forma 01/09 e calculou: $0 + 1 + 0 + 9 = 10$. Desse modo, qual é a maior soma que ele podia obter?

Questão 4. Sejam x , y e z números reais positivos tais que:

$$a = \frac{xy}{x+y}, b = \frac{xz}{x+z}, c = \frac{yz}{y+z}. \quad \text{Calcule } x \text{ em função de } a, b \text{ e } c.$$

Parte B

Questão 5) Uma senhora entrou numa floricultura e comprou x flores por y reais, x e y são números inteiros positivos. Quando a senhora estava para sair da loja, o gerente disse: “Se você comprar dez flores a mais, eu te vendo tudo por dois reais e você vai economizar 80 centavos por dúzia comprada.” Determine os valores de x e y .

Questão 6. - Dado um quadrado $ABCD$ de área 104, constrói-se exteriormente ao quadrado um semicírculo de diâmetro AB . Seja E um ponto do semicírculo tal que $\angle BAE = 30^\circ$. Se DE intersecta AB no ponto F , determine a área do triângulo AEF .

Questão 7- Uma corrida rústica é disputada por 20 atletas. Sabendo que 4 são brasileiros, determine a probabilidade de haver pelo menos um brasileiro entre os três primeiros colocados.

Questão 8. Um número inteiro representado no sistema decimal é chamado de *repunit* se ele for formado apenas por algarismos todos iguais a 1. Assim, os primeiros *repunits* são:

$$1, 11, 111, 1111, 11111, \dots$$

a) Mostre que um número *repunit* com n algarismos iguais a 1 pode ser escrito na

$$\text{forma } \frac{10^n - 1}{9};$$

b) Seja A um número repunit com $2n$ algarismos, todos iguais a 1:

$$A = 111\dots 11$$

Seja B um múltiplo de um número repunit, formado por n algarismos, todos iguais a 2:

$$B = 222\dots 22$$

Seja C um múltiplo de um número repunit, formado por n algarismos, todos iguais a 3:

$$C = 333\dots 33$$

$$\text{Mostre que } A - B = C^2$$