OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA
DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO - 2017

30 de setembro de 2017

<u>Nível U</u>

1. Seja $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ uma sequência de inteiros tal que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$. Defina a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ por $x_n = \{\sqrt{y_n^2 + y_n + 1}\}$. Prove que para todo inteiro positivo k, existe um inteiro positivo n_0 tal que para todo $n > n_0$, o k-ésimo dígito após a vírgula de x_n não depende de n.
   A parte fracionária de um número x, denotada por $\{x\}$ é definida por $\{x\} := x - \lfloor x \rfloor$, onde $\lfloor x \rfloor$ é a parte inteira de x.

2. Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre os reais e W um subespaço vetorial de V. Considere B uma base de V. Prove que para todo vetor $v \in V$, é possível trocar $\dim(V) - \dim(W)$ coordenadas de v (na base B) de forma que o novo vetor obtido seja um elemento de W.

3. Encontre todos os polinômios não constantes com coeficientes complexos P para os quais existe um polinômio não constante com coeficientes complexos Q satisfazendo $Q(x) = Q(P(x))$ para todo x complexo.

4. Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ uma sequência definida da seguinte forma: para cada n inteiro positivo, a_n é o número real positivo para o qual a igualdade

$$\int_0^{a_n} \frac{x^n}{1+x^n}\,dx = 1$$

   é válida. Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

5. Seja $\mathcal{F}$ uma família de subconjuntos do conjunto $\{1, 2, \ldots, 2017\}$ tal que para quaisquer $A, B \in \mathcal{F}$ distintos, vale que $A \cap B$ possui exatamente um elemento. Determine o maior número posível de elementos de $\mathcal{F}$.