OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA
DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO - 2016

24 de setembro de 2016

Nível 4 (3^o ano do ensino médio)

1. Seja $ABCD$ um paralelogramo. Por um ponto X do lado $\overline{AB}$ com $\overline{AX} < \overline{XB}$, traça-se uma reta paralela a $\overline{BC}$. Esta reta, juntamente com as diagonais e os lados do paralelogramo, determinará 3 quadriláteros. Sabendo que a soma das áreas desses quadriláteros é a maior possível, calcule a razão $\frac{\overline{AX}}{\overline{AB}}$.

2. Encontre todos os números reais x que satisfaçam

$$x = \frac{1}{2}\lfloor x\rfloor^2 + 3\lfloor x\rfloor + 2.$$

   A parte inteira de um número real x, denotada por $\lfloor x\rfloor$, é definida como o maior inteiro menor ou igual a x, ou seja $\lfloor x\rfloor \leq x < \lfloor x\rfloor + 1$. Por exemplo $\lfloor 4,475\rfloor = 4, \lfloor\pi\rfloor = 3, \lfloor 7\rfloor = 7$, $\lfloor -4,475\rfloor = -5$, $\lfloor -\pi\rfloor = -4$.

3. Pedro quer pintar os vértices de um tabuleiro $2 \times n$ de modo que cada quadradinho deste tabuleiro possua exatamente um vértice pintado.

   (a) Qual o número máximo de vértices que Pedro pode pintar?

   (b) Qual o número mínimo de vértices que Pedro pode pintar?

4. Seja N um número inteiro positivo com uma quantidade par de algarismos e escreva $N = (a_{2k}a_{2k-1}\dots a_4a_3a_2a_1)_{10}$ a representação decimal de N. Definimos o *alternado* de N como sendo o número $M = (a_{2k-1}a_{2k}\dots a_3a_4a_1a_2)_{10}$. Por exemplo, o alternado de 489012 é 840921. Encontre todos os inteiros positivos N tais que $M = 2N - 1$, onde M é o alternado de N.

5. Seja ABC um triângulo acutângulo e seja $\overline{AD}$, com D em $\overline{BC}$, a altura relativa ao vértice A. Sejam Γ_1 e Γ_2 as circunferências circunscritas aos triângulos ABD e ACD, respectivamente. A circunferência Γ_1 intersecta o lado $\overline{AC}$ nos pontos A e P, enquanto Γ_2 intersecta o lado $\overline{AB}$ nos pontos B e Q. Seja X o ponto de interseção da reta $\overleftrightarrow{BP}$ com Γ_2 de modo que P está entre B e X. Da mesma forma, seja Y o ponto de interseção da reta $\overleftrightarrow{CQ}$ com Γ_1 de modo que Q está entre C e Y. Sabendo que A, X e Y são colineares, calcule o menor valor possível para a medida do ângulo $B\widehat{A}C$.

6. Encontre todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que

$$f(x + yf(x)) + f(y - f(x)) = 2xf(y)$$

   para todos x, y reais.