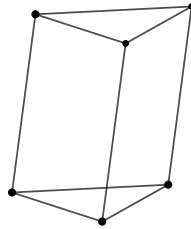


# OLIMPIÁDA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO - 2017

30 de setembro de 2017

Nível 3 ( 1º e 2º anos do ensino médio)

1. Seja  $ABCD$  um retângulo com lados  $\overline{AB} = 6$  e  $\overline{BC} = 8$ . Por um ponto  $X$  do lado  $\overline{AB}$  com  $\overline{AX} < \overline{XB}$ , traça-se uma reta paralela a  $\overline{BC}$ . Esta reta, juntamente com as diagonais e os lados do retângulo, determinará 3 quadriláteros. Sabendo que a soma das áreas desses quadriláteros é a maior possível, calcule a medida do segmento  $\overline{AX}$ .
2. Luiza quer pintar os vértices de um prisma triangular (ilustrado na figura abaixo) com 5 cores, de modo que se dois vértices estão ligados por uma aresta, então eles têm cores diferentes. De quantas maneiras Luiza pode pintar esse prisma?



3. Encontre todos os reais  $a$  para os quais o sistema de equações

$$\begin{cases} x^2 - yz = ax^2 \\ y^2 - xz = ax^2 \\ z^2 - xy = ax^2 \end{cases}$$

possui pelo menos uma solução real  $(x, y, z)$  com  $x \neq 0$ .

4. Sejam  $\Gamma$  uma circunferência de centro  $O$  e  $\ell$  uma reta tangente a  $\Gamma$  em  $A$ . Tome  $B$  um ponto em  $\Gamma$  (diferente do ponto diametralmente oposto a  $A$  em  $\Gamma$ ) e seja  $B'$  o simétrico de  $B$  em relação a  $\ell$ . Sejam  $E$ , distinto de  $A$ , o ponto de interseção de  $\Gamma$  com a reta  $\overleftrightarrow{B'A}$  e  $D$ , distinto de  $E$ , a interseção das circunferências circunscritas aos triângulos  $BB'E$  e  $AOE$ .
  - (a) Calcule a medida do ângulo  $B'\hat{B}E$ .
  - (b) Prove que  $B$ ,  $O$  e  $D$  são colineares.
5. Seja  $N$  um número inteiro positivo com uma quantidade par de algarismos e escreva  $N = (a_{2k}a_{2k-1} \dots a_4a_3a_2a_1)_{10}$  a representação decimal de  $N$ . Definimos o *alternado* de  $N$  como sendo o número  $M = (a_{2k-1}a_{2k} \dots a_3a_4a_1a_2)_{10}$ . Por exemplo, o alternado de 489012 é 840921. Encontre todos os inteiros positivos  $N$  tais que  $M = 2N - 1$ , onde  $M$  é o alternado de  $N$ .
6. Encontre todas as funções  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tais que

$$f(x + yf(x)) + f(y - f(x)) = 2xf(y)$$

para todos  $x, y$  reais.