OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO - 2016

24 de setembro de 2016

Nível U

1. Encontre todos os polinômios P com coeficientes reais tais que

$$xP(x) + yP(y) \geq 2P(xy)$$

para todos x e y reais.

2. Seja A uma matriz complexa $n \times n$ tal que $A^3 = \mathrm{Id}$ e $n + \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(A^2) = 0$, onde id é a matriz dentidade e $\mathrm{Tr}(B)$ é o traço da matriz B, isto é, a soma dos elementos da diagonal principal de B.

   (a) Prove que, se $n = 2$, então $\mathrm{Id} + A + A^2$ é a matriz nula.

   (b) Prove que $\mathrm{Id} + A + A^2$ é a matriz nula para todo n.

3. Seja $f : [0, 1) \to [0, 1)$ a função definida por $f(x) = \{10x\}$, onde $\{y\}$ é a parte fracionária de y. Seja f^n a n-ésima iterada da função f, ou seja $f^0(x) = x$ e $f^n = f \circ f^{n-1}$. A órbita do ponto x é o conjunto $O(x) = \{f^n(x) | n = 0, 1, \ldots\}$.

   (a) Encontre todos os $x \in [0, 1)$ tais que $O(x)$ é finito.

   (b) Prove que existe x tal que $O(x)$ é denso em $[0, 1)$, ou seja, para todo $y \in [0, 1)$ e para todo $\varepsilon > 0$, existe n natural tal que $|y - f^n(x)| < \varepsilon$.

   Lembrando, dado x real, sua parte inteira $\lfloor x \rfloor$ é o maior inteiro menor ou igual a x, e sua parte fracionária satisfaz $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

4. Seja a_n uma sequência de reais positivos, satisfazendo $a_{m+n} \leq a_n a_m$. Prove que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ existe e é finito.

5. Calcule

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\ln(|(x + y)(1 - xy)|)}{(1 + x^2)(1 + y^2)} dxdy.$$