OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA
DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO - 2016

24 de setembro de 2016

Nível 4 (3^o ano do ensino médio)

1. Escrevendo-se a representação decimal de 40! da esquerda para direita, qual o último digito não nulo que foi escrito? (Por exemplo 11!=39916800, logo o último dígito não nulo de 11! é 8.)

2. Encontre o número de sequências $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ satisfazendo que $a_n \in \{1,2,3,4\}$ para todo $n = 1,2,\ldots,10$ e que $a_{n+1} \le a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ para todo $n = 1,2,\ldots,9$.

3. A parte inteira de um número real x, denotada por $\lfloor x \rfloor$, é definida como o maior inteiro menor ou igual a x, ou seja $\lfloor x \rfloor \le x < \lfloor x \rfloor$. Por exemplo, $\lfloor 2,475 \rfloor = 2, \lfloor \pi \rfloor = 3, \lfloor 7 \rfloor = 7$. Já a parte fracionária de x, denotada por $\{x\}$, é definida como $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Por exemplo $\{2,475\} = 0,475$, $\{\pi\} = \pi - \lfloor \pi \rfloor = 0,141592...$, $\{7\} = 0$.
   Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \{10x\}$. Um número é dito **tri-replicante** se ele satisfaz
   $$(f \circ f \circ f)(x) = x.$$
   Encontre a soma de todos os números tri-replicantes.

4. Seja Γ uma circunferência de centro O e seja P um ponto no interior de Γ. Seja O' o ponto tal que P é ponto médio de $\overline{OO'}$. Suponha que a circunferência Γ' de centro O' que passa por P é secante a Γ e seja A um ponto na interseção de Γ com Γ'. Se B é o outro ponto de interseção da reta AP com Γ, calcule $\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}$.

5. Encontre todos os polinômios P com coeficientes reais tais que
   $$xP(x) + yP(y) \ge 2P(xy)$$
   para todos x e y reais.

6. Sejam ABC um triângulo acutângulo e Γ sua circunferência circunscrita. Sejam D, E e F os pontos de tangência da circunferência inscrita com os lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, respectivamente. Sejam A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 os pontos de interseção de Γ com as retas DE, DF e EF de modo que A_1 e A_2 se encontram no arco menor $\widehat{BC}$, B_1 e B_2 se encontram no arco menor $\widehat{AC}$, e C_1 e C_2 se encontram no arco menor $\widehat{AB}$. Se $\overline{A_1A_2} = \overline{B_1B_2} = \overline{C_1C_2}$, prove que o triângulo ABC é equilátero.