# OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA
# DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO - 2016

24 de setembro de 2016

Nível 3 ( $1^o$ e $2^o$ anos do ensino médio)

1. A professora de Joãozinho escreveu no quadro um sistema de equações. Joãozinho, quando copiou do quadro o sistema, escreveu errado um, e somente um, coeficiente do sistema. Esse foi o sistema que Joãozinho escreveu em seu caderno:

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 6 \\ 3x + 2y + z &= 7 \\ 4x + 2y + 3z &= 12 \end{aligned}$$

   Sabendo que o sistema original tem todos os coeficientes inteiros e sua solução é $(\frac{5}{11}, \frac{21}{11}, \frac{20}{11})$, encontre o sistema original.

2. A parte inteira de um número real $x$, denotada por $\lfloor x \rfloor$, é definida como o maior inteiro menor ou igual a $x$, ou seja $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$. Por exemplo $\lfloor 2,475 \rfloor = 2, \lfloor \pi \rfloor = 3, \lfloor 7 \rfloor = 7$. Já a parte fracionária de $x$, denotada por $\{x\}$, é definida como $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Por exemplo $\{2,475\} = 0,475$, $\{\pi\} = \pi - 3 = 0,141592...$, $\{7\} = 0$.
   Um número real é dito **replicante** se $x = \{10x\}$. Encontre a soma de todos os números replicantes.

3. Encontre o número de sequências $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ satisfazendo $a_n \in \{1, 2, 3, 4\}$ para todo $n = 1, 2, \ldots, 10$ e $a_{n+1} \leq a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ para todo $n = 1, 2, \ldots, 9$.

4. Sejam $x$, $y$ e $z$ reais satisfazendo $x, y, z \geq -1$ e $x + y \geq 2$, $x + z \geq 2$, $y + z \geq 2$. Prove que $xy + xz + yz \geq 3$.

5. Seja $\Gamma$ uma circunferência de centro $O$ e seja $P$ um ponto no interior de $\Gamma$. Seja $O'$ o ponto tal que $P$ é ponto médio de $\overline{OO'}$. Suponha que a circunferência $\Gamma'$ de centro $O'$ que passa por $P$ é secante a $\Gamma$ e seja $A$ um ponto na interseção de $\Gamma$ com $\Gamma'$. Se $B$ é o outro ponto de interseção da reta $AP$ com $\Gamma$, calcule $\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}$.

6. Seja $p > 3$ um número primo. Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}$ números inteiros tais que $a_1$ não é múltiplo de $p$ e $a_1^k + a_2^k + \ldots + a_{p-1}^k$ é múltiplo de $p$ para todo $k = 1, \ldots, p-2$. Prove que $a_i$ não é múltiplo de $p$ para todo $i = 1, 2, \ldots, p-1$, e que $a_i - a_j$ não é múltiplo de $p$ para todos $i, j = 1, 2, \ldots, p-1$ com $i \neq j$.