OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA
DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO - 2015

19 de setembro de 2015

Nível U

1. Calcule a seguinte integral indefinida
$$\int \text{sen}(ax)\text{sen}(bx)\text{sen}(cx)dx.$$

2. Seja $\mathcal{P}$ uma parábola e sejam A e B pontos sobre $\mathcal{P}$. As tangentes a $\mathcal{P}$ por A e B se cortam em Q. Seja C um ponto entre A e B na parábola. A tangente a $\mathcal{P}$ por C corta QA em X e QB em Y, respectivamente. Determine o valor de $\frac{QX}{QA} + \frac{QY}{QB}$.

3. Seja f uma função de $\mathbb{R}_{\geq 0}$ em $\mathbb{R}$, contínua e tal que $\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx < \infty$, isto é, a integral imprópria existe. Demonstrar que para todo $q > 0$, existe a integral
$$\int_q^\infty \frac{x \cdot f(x)}{\sqrt{x^2 - q^2}}dx$$

4. Seja $\{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ um conjunto de discos no plano Euclideano. Seja $a_{i,j} = S(D_i \cap D_j)$ a área de $D_i \cap D_j$. Prove que
$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_i x_j \geq 0$$
para quaisquer números reais $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

5. Sejam A e B duas matrizes 2×2, com entradas complexas, tais que $\det(AB+BA) = 4\det(AB)$. Prove que
$$(AB - BA)^{2015} = 0$$
.