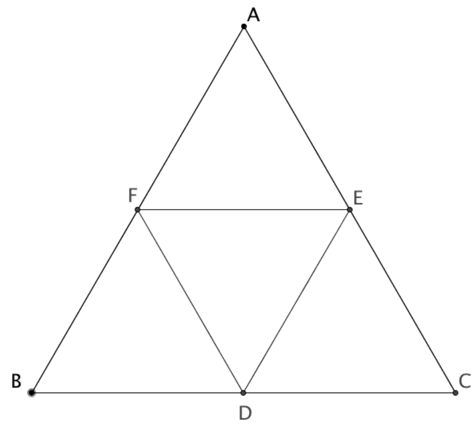
OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA
DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO - 2015

19 de setembro de 2015

Nível 4 (3^o ano do ensino médio)

1. Deseja-se colocar os números de 1 a 6 nos pontos A, B, C, D, E, F, dispostos como na figura abaixo. Defina S_{XYZ} a soma dos números escritos nos vértices do triângulo XYZ.



   (a) Determine o valor máximo de $S_{AEF} + S_{BDF} + S_{CDE} + S_{DEF}$.

   (b) De quantas maneiras podemos colocar os números de forma a obter o valor máximo do item anterior?

2. Seja $ABCD$ um quadrado. CDE e BFG são triângulos equiláteros tais que B é ponto médio de AF, CDE é exterior ao quadrado e G e E estão no mesmo semiplano determinado pela reta AB.

   (a) Prove que $DBGE$ é um paralelogramo.

   (b) Calcule os ângulos do triângulo ECG.

3. De quantas maneiras é possível pintar as casas de um tabuleiro 3×3 com 5 cores de modo que cada linha, coluna e diagonal possua 3 cores distintas?

4. Um número é dito *especial* se ele tem dois ou mais algarismos e é múltiplo da soma dos seus algarismos. Por exemplo, 12 é especial pois é múltiplo de $1 + 2 = 3$.

   (a) Encontre três números especiais consecutivos.

   (b) Encontre quatro números especiais consecutivos.

5. Sejam a, b e c reais tais que $a^2b+b^2c+c^2a-ab^2-bc^2-ca^2 = 6$ e $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc = 7$. Prove que se a é inteiro, então b e c também são inteiros.

6. Seja ABC um triângulo tal que $\angle BAC = 60°$. Suponha que o circuncentro O pertence à circunferência inscrita ao triângulo ABC e $AC > AB$. Prove que $\angle ABC < 84°$.