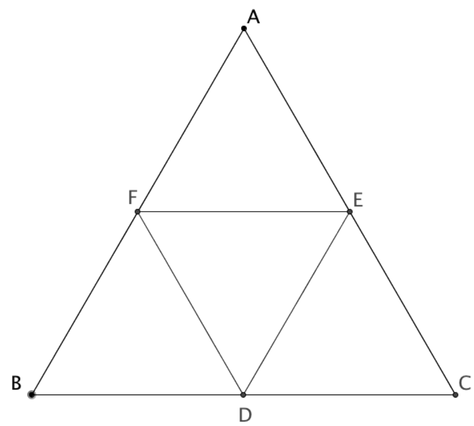
OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA
DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO - 2015

19 de setembro de 2015

Nível 3 (1^o e 2^o anos do ensino médio)

1. O Ano 1978 foi *peculiar*, pois a soma dos números formados pelos seus dois primeiros dígitos e pelos seus dois últimos dígitos é igual ao número formado pelos dois dígitos do meio, ou seja, $19 + 78 = 97$. Quando será o próximo ano peculiar?

2. Deseja-se colocar os números de 1 a 6 nos pontos A, B, C, D, E, F, dispostos como na figura abaixo. Defina S_{XYZ} a soma dos números escritos nos vértices do triângulo XYZ.



   (a) Determine o valor máximo de $S_{AEF} + S_{BDF} + S_{CDE} + S_{DEF}$.

   (b) De quantas maneiras podemos colocar os números de forma a obter o valor máximo do item anterior?

3. De quantas maneiras é possível pintar as casas de um tabuleiro 3×3 com 5 cores de modo que cada linha, coluna e diagonal possua 3 cores distintas?

4. Encontre todas as soluções reais da equação

$$\sqrt{4 - x\sqrt{4 - (x-2)\sqrt{1 + (x-5)(x-7)}}} = \frac{5x - 6 - x^2}{2}.$$

5. Sejam $ABCD$ um paralelogramo e P um ponto no lado CD. Sejam Q a interseção da reta AP com a reta BC e F a interseção da reta QD com a reta AB. Prove que $PQ = AB$ se, e somente se, PF é bissetriz do ângulo $\angle DPA$.

6. Seja $S = \{1, 2, \ldots, 300\}$ o conjunto dos 300 primeiros números naturais. Escolhendo ao acaso dois números, não necessariamente distintos, em S (cada número tem a mesma probabilidade de ser escolhido), determine a probabilidade de o produto destes dois números ser múltiplo de 300.