

**OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA
DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO - 2014**
 21 de setembro de 2014
Nível U

1. Calcule as seguintes integrais:

(a)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \ln(1 + x^2) \cos(x)}{e^{x^2}} dx.$$

(b)

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{2}x(1-x)}{\sqrt{2} + 2^x} dx.$$

2. Prove que

$$\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin(x^2) dx > 0$$

3. Sejam A , B e C pontos não colineares em \mathbb{R}^2 com coordenadas inteiras. Se r é o raio do círculo inscrito no triângulo ABC , prove que pelo menos um lado de ABC é maior que $\frac{1}{3r}$.

4. Seja $(u_k)_{k=0,1,2,\dots}$ uma sequência estritamente crescente de números inteiros positivos. A série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\text{mmc}(u_k, u_{k+1})}$$

converge ou diverge?

5. Para quais reais α a sequência $x_n := (\cos(n\alpha))^n$ é convergente?

6. Seja M uma matriz $(n+1) \times (n+1)$ com entradas $(a_{i,j})_{i,j=0,\dots,n}$ onde $a_{i,j} = \cos(\frac{(i-j)\pi}{2n})$. Calcule o polinômio característico de M .