

**OLIMPIÁDA DE MATEMÁTICA**  
**DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO - 2014**

21 de setembro de 2014

Nível U

1. Calcule as seguintes integrais:

(a)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \ln(1+x^2) \cos(x)}{e^{x^2}} dx.$$

(b)

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{2}x(1-x)}{\sqrt{2}+2^x} dx.$$

2. Prove que

$$\int_0^{\sqrt{2}\pi} \sin(x^2) dx > 0$$

3. Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  pontos não colineares em  $\mathbb{R}^2$  com coordenadas inteiras. Se  $r$  é o raio do círculo inscrito no triângulo  $ABC$ , prove que pelo menos um lado de  $ABC$  é maior que  $\frac{1}{3r}$ .
4. Seja  $(u_k)_{k=0,1,2,\dots}$  uma sequência estritamente crescente de números inteiros positivos. A série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\text{mmc}(u_k, u_{k+1})}$$

converge ou diverge?

5. Para quais reais  $\alpha$  a sequência  $x_n := (\cos(n\alpha))^n$  é convergente?
6. Seja  $M$  uma matriz  $(n+1) \times (n+1)$  com entradas  $(a_{i,j})_{i,j=0,\dots,n}$  onde  $a_{i,j} = \cos(\frac{(i-j)\pi}{2n})$ . Calcule o polinômio característico de  $M$ .