OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA
DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO - 2014

21 de setembro de 2014

Nível 4 (3^o ano do ensino médio)

1. Encontre dois números a e b tais que os algarismos de b são os mesmos algarismos de a em outra ordem e o número $a-b$ possui todos os algarismos iguais a 1.

2. Um número n de 3 algarismos é dito *eficiente* se os últimos 3 algarismos de n^2 são os mesmos algarismos de n e na mesma ordem. Encontre todos os números eficientes.

3. Seja Γ uma circunferência, l uma reta secante a Γ em B e C e r a reta tangente a Γ por B. Tome A um ponto em l distinto de C com $\overline{AB}=\overline{BC}$. Se s é uma reta por A tangente a Γ e P é o ponto de interseção de r e s prove que o ângulo $\angle APB$ não é obtuso.

4. Para cada n inteiro não negativo, calcule a quantidade de triplas (a,b,c) de inteiros não negativos que satisfazem o sistema de inequações abaixo:

$$\begin{cases} a+b & \leq & 2n \\ a+c & \leq & 2n \\ b+c & \leq & 2n \end{cases}$$

5. Seja $A_0=(0,0)$, $A_1=(3,0)$ e $A_2=(0,2)$ pontos no plano cartesiano. Definimos recursivamente o ponto A_{n+3} como o baricentro do triângulo $A_nA_{n+1}A_{n+2}$ para $n \geq 0$. Encontre um ponto que está no interior de todos os triângulos $A_nA_{n+1}A_{n+2}$ para todo $n \geq 0$.

6. Seja ABC um triângulo acutângulo com $\overline{AB} \neq \overline{AC}$. Um ponto P interior ao triângulo é dito B-*bom* se $\angle PBC = \angle PCA$, e é dito C-*bom* se $\angle PCB = \angle PBA$. Sejam D o ponto B-bom mais próximo de A e E o ponto C-bom mais próximo de A. Defina F o ponto de interseção entre as retas BD e CE, e G o ponto de interseção, distinto de F, entre os circuncírculos de BEF e CDF.

   (a) Prove que a reta PQ é perpendicular a reta BC.

   (b) Prove que A, E, D e G são concíclicos.