

OLIMPIÁDA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO - 2014

21 de agosto de 2014

Nível 3 (1º e 2º anos do ensino médio)

1. Seis pessoas tentam adivinhar o número de pedras em uma caixa. Arnaldo diz 57 pedras, Bernaldo diz 64, Cernaldo diz 67, Dernaldo diz 70, Ernaldo 54 e Fernaldo 47. Todos erraram, alguns para mais e outros para menos. Eles erraram por 1, 4, 6, 9, 11 e 12, em alguma ordem, mas não se sabe quem cometeu cada erro. Quantas pedras havia na caixa?
2. Sabendo que cada uma das letras A, B, C, D, E, F, G e H representa um algarismo diferente entre 0 e 9 e que os números $ABACDE, CAFDG, CHHBAED$ são lados de um triângulo. Descubra qual algarismo cada letra representa.
3. Um número n de 3 algarismos é dito eficiente se os últimos 3 algarismos de n^2 são os mesmos algarismos de n e na mesma ordem. Encontre todos os números eficientes.
4. Seja Γ uma circunferência, l uma reta secante a Γ em B e C e r a reta tangente a Γ por B . Tome A um ponto em l distinto de C com $\overline{AB} = \overline{BC}$. Se s é uma reta por A tangente a Γ e P é o ponto de interseção de r e s prove que o ângulo $\angle APB$ não é obtuso.
5. Para cada n inteiro não negativo, calcule a quantidade de triplas (a, b, c) de inteiros não negativos que satisfazem o sistema de inequações abaixo:

$$\begin{cases} a + b & \leq & 2n \\ a + c & \leq & 2n \\ b + c & \leq & 2n \end{cases}$$

6. Seja ABC um triângulo acutângulo com $\overline{AB} \neq \overline{AC}$. Um ponto P interior ao triângulo é dito B -bom se $\angle PBC = \angle PCA$, e é dito C -bom se $\angle PCB = \angle PBA$. Sejam D o ponto B -bom mais próximo de A e E o ponto C -bom mais próximo de A . Defina F o ponto de interseção entre as retas BD e CE , e G o ponto de interseção, distinto de F , entre os circuncírculos de BEF e CDF .
 - (a) Prove que a reta PQ é perpendicular a reta BC .
 - (b) Prove que A, E, D e G são concíclicos.