

OLIMPIÁDA DE MATEMÁTICA

DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO - 2013

31 de agosto de 2013

Nível 4 (3º ano do ensino médio)

1. Dado um número n natural, fazemos uma diamante com os números $1, 2, \dots, 2n - 1$ do seguinte modo, na primeira linha aparece um número 1, na segunda aparecem dois números 2, e assim por diante até que na n -ésima linha aparecem n números n , já na $n + 1$ -ésima linha aparecem $n - 1$ números $n + 1$, até que na $2n - 1$ -ésima linha aparece um número $2n - 1$. Abaixo temos exemplos de diamantes para $n = 1, 2, 3, 4$.

$$\begin{array}{c}
 | \ 1 \ | \\
 \\
 \left| \begin{array}{cc} & 1 \\ 2 & & 2 \\ & 3 & \end{array} \right| \\
 \\
 \left| \begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 2 & & 2 & \\ 3 & & 3 & & 3 \\ & 4 & & 4 & \\ & & 5 & & \end{array} \right| \\
 \\
 \left| \begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & \\ & & & 2 & & 2 & \\ & 3 & & 3 & & 3 & \\ 4 & & 4 & & 4 & & 4 \\ & 5 & & 5 & & 5 & \\ & & 6 & & 6 & & \\ & & & 7 & & & \end{array} \right|
 \end{array}$$

Qual a soma de todos os elementos no n -ésimo diamante?

2. Sejam A, B e C pontos numa reta com B entre A e C , de modo que $\overline{BC} < \overline{AB}$. Constrói-se os quadrados $ABDE$ e $BCFG$ do mesmo lado da reta.
- (a) Calcule a razão $\frac{EF}{AG}$.
- (b) Calcule a soma de ângulos $\hat{BAG} + \hat{GFE}$.
- (c) Prove que as retas AG, EF e DC concorrem em um único ponto.
3. Seja a_n o número de maneiras de preencher um tabuleiro $n \times n$ com 0 e 1 de modo que a soma em cada linha e cada coluna seja a mesma. Calcule a_2, a_3, a_4 e a_5 .
4. Luca tem uma calculadora com um único botão. Se um número x está na tela da calculadora e apertamos seu único botão, o número x é substituído pelo número $\frac{2x}{x^2+1}$. Dado que, inicialmente, o número 2 está na tela da calculadora qual número aparecerá após apertamos 2013 vezes seu botão.
5. Um inteiro é dito sinistro se pode ser escrito na forma $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$, com x, y, z inteiros. Determine a quantidade de números sinistro existentes de 1 a 2013.
6. Encontre todas as funções $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ tais que

$$f(x - f(y)) = f(x) - f(y)$$

para todos números inteiros x e y .