

OLIMPIÁDA DE MATEMÁTICA
DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO - 2013

31 de agosto de 2013

Nível 3 (1º e 2º anos do ensino médio)

1. Encontre três números primos distintos dois a dois tais que sua soma e a soma dos seus quadrados são números primos também.
2. No castelo da bruxa Elvira Hyvolta existem 2 tipos de poções, as de gigantismo e as de nanicolina. Tomando as de gigantismo, os seres deste reino encantado aumentam em 700% de tamanho, e com as de nanicolina, eles diminuem em 75% seu tamanho. Cada ser toma exatamente uma poção por dia. Desse modo, é possível que um sapo que acabou de chegar, após tomar uma certa combinação das poções de Elvira, retorne a seu tamanho original?
3. Sejam A , B e C pontos numa reta com B entre A e C , de modo que $\overline{BC} < \overline{AB}$. Constrói-se os quadrados $ABDE$ e $BCFG$ do mesmo lado da reta.
 - (a) Calcule a razão $\frac{EF}{AG}$.
 - (b) Calcule a soma de ângulos $\hat{BAG} + \hat{GFE}$.
 - (c) Prove que as retas AG , EF e DC concorrem em um único ponto.
4. Seja a_n o número de maneiras de preencher um tabuleiro $n \times n$ com 0 e 1 de modo que a soma em cada linha e cada coluna seja a mesma. Calcule a_2 , a_3 , a_4 e a_5 .
5. Luca tem uma calculadora com um único botão. Se um número x está na tela da calculadora e apertamos seu único botão, o número x é substituído pelo número $\frac{2x}{x^2+1}$. Dado que, inicialmente, o número 2 está na tela da calculadora qual número aparecerá após apertamos 2013 vezes seu botão.
6. Dois números a e b são ditos parceiros se a e b possuem os mesmo fatores primos. Por exemplo, 15 e 375 são parceiros, mas 35 e 70 não são. Provar que existem infinitos pares de inteiros positivos distintos m e n tais que as duas condições a seguir são satisfeitas:
 - (i) m e n são parceiros
 - (ii) $m + 1$ e $n + 1$ são parceiros