OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA
DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 2012

20 de outubro de 2012.

Nível 4 – (3º ano do Ensino Médio)

1. Considere os polinômios:

$$\binom{x}{0} = 1, \quad \binom{x}{1} = x, \quad \binom{x}{2} = \frac{x(x-1)}{2!}, \quad \binom{x}{3} = \frac{x(x-1)(x-2)}{3!}$$

Em geral,

$$\binom{x}{j} = \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-j+1)}{j!}, \text{ para } j = 1, 2, 3, \ldots.$$

É sabido que para qualquer natural n, existem $a_0, a_1, \ldots, a_n$ satisfazendo

$$x^n = a_0\binom{x}{0} + a_1\binom{x}{1} + \ldots + a_n\binom{x}{n}.$$

Além disso, esses $a_0, a_1, \ldots, a_n$ dependem apenas de n (não dependem de x) e são únicos para cada n. Por exemplo:

$$\begin{aligned} x^2 &= \binom{x}{1} + 2\binom{x}{2} \\ x^3 &= \binom{x}{1} + 6\binom{x}{2} + 6\binom{x}{3} \end{aligned}$$

Para $n = 2012$, determine os valores de a_0, a_1, a_2, a_3 e a_{2012}.

2. Uma permutação $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $(1, 2, \ldots, n)$ é dita boa se não existem inteiros $1 \leq i < j < k \leq n$ tal que x_i, x_j, x_k formam uma sequencia crescente ou decrescente, por exempo a permutação $(4, 1, 5, 2, 3)$ não é boa pois $x_2 = 1, x_4 = 2, x_5 = 3$ estão em ordem crescente. Para cada n, quantas permutações boas existem?

3. Seja ABC um triângulo. Sejam D e E pontos no lado BC tal que $2\overline{BD} = 2\overline{DE} = \overline{EC}$. Sabendo que os círculos inscritos nos triângulos ABD, ADE e AEC tem o mesmo raio, calcule o seno do ângulo $A\hat{C}B$.

4. Encontre todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que

$$f(xy - f(x)) = xf(y)$$

para todos x, y reais.

5. Dado um número natural n seja $P(n)$ o produto de seus dígitos. Determine a menor razão inteira de $\dfrac{n}{P(n)}$ onde n percorre todos os números naturais de 3 dígitos.

OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA
DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 2012

20 de outubro de 2012.

<u>Nível 4 – (3º ano do Ensino Médio)</u>

6. Arnaldo e Bernaldo jogam um jogo matemático. Numa primeira etapa, Arnaldo começa escolhendo 1 número inteiro não negativo e, em seguida, após ver o número que Arnaldo escolheu, Bernaldo escolhe outro número inteiro não negativo. O processo se repete uma vez, com Arnaldo escolhendo um novo número não negativo e, em seguida, Bernaldo escolhendo um último número não negativo.

   Após esse processo, Arnaldo escolhe um subconjunto de 3 números a, b e c dentre os 4 números originais e monta a equação $ax^2 + bx + c = 0$.

   Seja d o número não escolhido por Arnaldo. Bernaldo ganha caso consiga encontrar d números inteiros (possivelmente negativos) distintos $t_i (i = 1, 2, ..., d)$ tais que a equação

$$(a + t_i)x^2 + (b + t_i)x + (c + t_i) = 0$$

   tenha raiz real. Caso contrário, Arnaldo ganha. Qual jogador possui estratégia vencedora?

   Obs.: Se $d = 0$ Bernaldo ganha. E uma equação da forma $0x^2 + 0x + 0 = 0$ tem raiz real.

   Exemplo: Arnaldo começa escolhendo o número 1, então Bernaldo escolhe 4, depois Arnaldo escolhe 4 e, por fim, Bernaldo escolhe 2. Então, Arnaldo monta a equação $4x^2 + x + 4 = 0$. E Bernaldo ganha porque consegue 2 (o número que sobrou) inteiros -3 e -4 tais que as equações $(4 - 3)x^2 + (1 - 3)x + (4 - 3) = 0$ e $(4 - 4)x^2 + (1 - 4)x + (4 - 4) = 0$ têm raiz real.