OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA
DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 2012

20 de outubro de 2012.

Nível 3 – (1º e 2º ano do Ensino Médio)

1. Ao efetuarmos a divisão do número 10^{100} por 7, encontramos quociente q e resto r. Determine a soma dos algarismos de q.

2. Ache todos os números de dois dígitos (ab) tais que (ab) divide $(a0b)$.

   Obs.: (ab) é a representação decimal, a é o dígito das dezenas e b o dígito das unidades.

3. Seja $ABCDEF$ um hexágono regular. De quantas maneiras podemos colocar os números de 1 a 6 nos vértices do hexágono de modo que cada número apareça exatamente uma vez e a soma dos números em quaisquer dois vértices opostos não seja múltipla de 3.

4. Seja ABC um triângulo. Sejam D e E pontos no lado BC tal que $2\overline{BD} = 2\overline{DE} = \overline{EC}$. Sabendo que os círculos inscritos nos triângulos ABD, ADE e AEC tem o mesmo raio, calcule o seno do ângulo $A\hat{C}B$.

5. Encontre todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que

   $$f(xy - f(x)) = xf(y)$$

   para todos x, y reais.

6. Arnaldo e Bernaldo jogam um jogo matemático. Numa primeira etapa, Arnaldo começa escolhendo 1 número inteiro não negativo e, em seguida, após ver o número que Arnaldo escolheu, Bernaldo escolhe outro número inteiro não negativo. O processo se repete uma vez, com Arnaldo escolhendo um novo número não negativo e, em seguida, Bernaldo escolhendo um último número não negativo.

   Após esse processo, Arnaldo escolhe um subconjunto de 3 números a, b e c dentre os 4 números originais e monta a equação $ax^2 + bx + c = 0$.

   Seja d o número não escolhido por Arnaldo. Bernaldo ganha caso consiga encontrar d números inteiros (possivelmente negativos) distintos $t_i (i = 1, 2, ..., d)$ tais que a equação

   $$(a + t_i)x^2 + (b + t_i)x + (c + t_i) = 0$$

   tenha raiz real. Caso contrário, Arnaldo ganha. Qual jogador possui estratégia vencedora?

   Obs.: Se $d = 0$ Bernaldo ganha. E uma equação da forma $0x^2 + 0x + 0 = 0$ tem raiz real.

   Exemplo: Arnaldo começa escolhendo o número 1, então Bernaldo escolhe 4, depois Arnaldo escolhe 4 e, por fim, Bernaldo escolhe 2. Então, Arnaldo monta a equação $4x^2 + x + 4 = 0$. E Bernaldo ganha porque consegue 2 (o número que sobrou) inteiros -3 e -4 tais que as equações $(4 - 3)x^2 + (1 - 3)x + (4 - 3) = 0$ e $(4 - 4)x^2 + (1 - 4)x + (4 - 4) = 0$ têm raiz real.