OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA
DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 2011

17 de setembro de 2011.

Nível 4 – (3º ano do Ensino Médio)

PARTE DISCURSIVA (20 pontos por questão)

QUESTÃO 1

Seja a_n uma sequencia definida por $a_1 = 3$ e $a_{n+1} = (10 - 2n)a_n + (4n - 18)$, para todo $n \geq 1$. Ache o maior termo da sequencia.

QUESTÃO 2

Sejam A, B e C conjuntos tais que $n(A) = 2x - 3$, $n(B) = x - 2$, $n(C) = 3x - 4$ e $n(A \cup B \cup C) = x^2$, onde n(S) é o número de elementos no conjunto S. Ache $n(A \cap B)$.

QUESTÃO 3

Seja P uma parábola. Ache o lugar geométrico dos pontos Q tais que existem duas retas tangentes a P por Q e as distâncias de Q aos pontos de tangência de cada uma dessas retas são iguais.

QUESTÃO 4

Matheus devia escrever no quadro um sistema de cinco equações com três incógnitas (x, y, z) que é um sistema possível e com coeficientes inteiros. Entretanto, Matheus se atrapalhou com os números e acabou trocando um e apenas um dos coeficientes de uma das equações. Com isso, o novo sistema ficou impossível. O sistema que Matheus escreveu é:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & 3y & + & 2z & = & 9 \\ 2x & + & y & - & z & = & 5 \\ 3x & + & y & - & z & = & 7 \\ 3x & - & 3y & - & 2z & = & -3 \\ -x & - & y & + & z & = & -2 \end{array}$$

(a) Diga, justificando sua afirmação, qual a equação que teve um dos termos trocados.

(b) Da equação errada, diga qual dos quatro termos foi trocado e qual o termo que deveria ser posto em seu lugar. Diga também qual a solução do sistema que Matheus deveria ter copiado.

QUESTÃO 5

Uma sequência $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de inteiros não nulos é dita k - legal, se $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 0$ e a soma de quaisquer k números consecutivos na sequência é maior ou igual a 0. Por exemplo, a sequência 1, −1, 2, −2 é 2 – legal, mas não é 3 - legal, já que a soma dos 3 últimos termos é $(-1) + 2 + (-2) = -1$. Para quais valores de n existe uma sequência ao mesmo tempo 3 – legal e 4 - legal?

QUESTÃO 6

Sejam m, n inteiros positivos menores ou iguais a 2011 tais que $d(m)d(n) = 2d(mn)$, onde d(n) é o número de divisores positivos de n. Ache o maior valor possível para o mdc(m, n).