OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA
DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 2011

17 de setembro de 2011.

<u>Nível 3– (1º e 2º anos do Ensino Médio)</u>

<u>PROVA DISCURSIVA</u> ***<u>(20 pontos por questão)</u>***

QUESTÃO 1

Dois números de 5 dígitos são tais que todos os 10 dígitos são usados (por exemplo: 43876 e 19025). É possível que a diferença entre eles seja menor que 250?

QUESTÃO 2

Sejam a e k números reais tais que se $f(x) = ax^2 - 4022ax + k$, então $f(2010) = 2011$.

Ache $f(2012)$.

QUESTÃO 3

Sejam ABC um triângulo com AB = AC e D o pé da bissetriz relativa ao vértice A. Sejam também Γ a circunferência circunscrita a ABC e P o ponto onde a reta tangente a Γ por A encontra a reta BC. Finalmente, seja E o ponto de interseção da bissetriz do ângulo APB com o lado AB. Mostre que DE é paralelo a AC.

QUESTÃO 4

Sejam A, B e C conjuntos tais que $n(A) = 2x - 3$, $n(B) = x - 2$, $n(C) = 3x - 4$ e $n(A \cup B \cup C) = x^2$, onde n(S) é o número de elementos no conjunto S. Ache $n(A \cap B)$.

QUESTÃO 5

Uma sequência $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de inteiros não nulos é dita k - legal, se $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 0$ e a soma de quaisquer k números consecutivos na sequência é maior ou igual a 0. Por exemplo, a sequência 1, −1, 2, −2 é 2 – legal, mas não é 3 - legal, já que a soma dos 3 últimos termos é $(-1) + 2 + (-2) = -1$. Para quais valores de n existe uma sequência ao mesmo tempo 3 – legal e 4 - legal?

QUESTÃO 6

Existe função f : ¡ → ¡ satisfazendo

$$f(f(x) - x) = 1 \qquad \text{e} \qquad |\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{x}| < \frac{|\mathbf{x}| + 1}{2011}$$

para todo x ∈ ¡ ?